**Exercice 1** Densité de probabilité.

On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -\ln x & \text{si } x \in ]0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que $f$ est une densité de probabilité.

*$f$ est une densité du produit de deux variables indépendantes qui suivent une loi uniforme sur $[0,1]$... Voir au niveau de la convolution.*

**Exercice 2** Loi de Pareto. Densité de probabilité. Fonction de répartition. Espérance. $\mathbf{Y = \ln X}$.

$a$ est un réel strictement positif. On considère la fonction $f_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_a(t) = \begin{cases} at^{-a-1} & \text{si } t \in [1,+\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Q1. Montrer que $f_a$ est une densité de probabililité.

Q2. $X$ est une variable aléatoire réelle admettant pour densité $f_a$.

a) Trouver la fonction de répartition $F_X$ de $X$.

b) $X$ possède -t-elle une espérance ? Si oui la calculer. Même chose pour la variance.

c) $Y = \ln X$. Trouver la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$.

**Exercice 3** Espérance.

Soit $X$ une variable à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et $F$ sa fonction de répartition. On suppose que :

- $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
- $X$ admet une espérance $E(X)$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,(1 - F(x) - F(-x)) = 0$.

Montrer que $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [1 - F(t) - F(-t)]\,dt$.

**Exercice 4** Géométrique-exponentielle.

$(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables alétaoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suivent la même loi exponentielle de paramètre $a$.

Soit $x$ un réel strictement positif. Trouver la loi de la variable aléatoire $N_x$ égale à $\mathrm{Min}\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k > x\}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} P(N_x > E(N_x))$.

**Exercice 5** $\boxed{\mathbf{Y = X^2}}$

Soit $X$ une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité $f$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $Y = X^2$ est une variable aléatoire à densité admettant pour densité $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in ]-\infty, 0],\ g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in ]0,+\infty[,\ g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\Big).$$

**Exercice 6** $\boxed{\mathbf{Y = |X|}}$

Soit $X$ une variable aléatoire réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité $f$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $Y = |X|$ est une variable réelle à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et en donner une densité.

Exercice 7

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

Q1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ ayant $f$ pour densité.

Q2. Soit $\varphi$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Étudier les variations de $\varphi$. Montrer que $\varphi$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et déterminer sa bijection réciproque.

Q3. On définit une variable aléatoire $Y$ par : $Y = \varphi(X) = \dfrac{e^X - 1}{e^X + 1}$.

Déterminer la fonction de répartition et une densité de $Y$.