Chapitre 1: Modes de convergences

Prof. Mohamed El Merouani

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques
https://elmerouani.jimdofree.com/calcul-des-probabilités

2020/2021

Plan :

- Rappels sur quelques inégalités de la probabilité
  - Inégalité de Markov
  - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
  - Inégalité de Jensen
- Convergence ponctuelle de suites de fonctions.
- Convergence en probabilité.
- Convergence en loi.
- Convergence presque sûre ou Convergence forte.
- Convergence en moyenne d'ordre p.
  - Convergence en moyenne quadratique.

Introduction :

On considère une suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, chaque v.a. de cette suite est définie sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$:

$$X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \in \mathcal{A} \mapsto X_n(\omega) \in \mathbb{R}$$

On se propose de connaître la limite de cette suite de v.a. (des fonctions de l'espace fondamental Ω dans l'ensemble $\mathbb{R}$).
L'intérêt principal de cette situation est la possibilité d'approximer une v.a. par une autre.

Inégalité de Markov :

Inégalité de Markov :

Soit X une variable aléatoire positive telle que $E(|X|) < +\infty$, alors $\forall \varepsilon > 0,\ P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$.

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$, soit $\omega \in \Omega$, on a : $\varepsilon \mathbb{I}_{\{X \geq \varepsilon\}} \leq X$ (car X est une variable aléatoire positive)

Alors, on prend l'espérance mathématique sur l'inégalité :

$E\left(\varepsilon \mathbb{I}_{\{X \geq \varepsilon\}}\right) = \varepsilon E\left(\mathbb{I}_{\{X \geq \varepsilon\}}\right) = \varepsilon P(X \geq \varepsilon) \leq E(X)$ ■

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Soit X une variable aléatoire de carré intégrable, alors $\forall \varepsilon > 0$,
$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$.

Preuve :

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $Y = (X - E(X))^2$ et au réel $\varepsilon^2 > 0$, en tenant compte que $\{(X - E(X))^2 \geq \varepsilon^2\} = \{|X - E(X)| \geq \varepsilon\}$ ■

Inégalité de Jensen :

Inégalité de Jensen :

Soit g une fonction réelle convexe et soit X une variable aléatoire telle que $E(X)$ et $E(g(X))$ existent, alors :

$$g(E(X)) \leq E(g(X))$$

Preuve :

La convexité de g assure qu'en tout point le graphe de g est au-dessus de sa tangente.

Donc $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \lambda_a \in \mathbb{R},$ tel que$\forall x, g(x) \geq g(a) + \lambda_a(x-a)$

On l'applique à $x = X(\omega)$ et $a = E(X)$.

on obtient : $\forall \omega \in \Omega, g(X(\omega)) \geq g(E(X)) + \lambda_a(X(\omega) - E(X))$

Il suffit, alors de prendre l'espérance pour obtenir le résultat :

$E(g(X)) \geq g(E(X)) + \underbrace{\lambda_a E(X(\omega) - E(X))}_{=0}$

Finalement, $E(g(X)) \geq g(E(X))$

Convergence ponctuelle des suites de fonctions :

Définition :

Soit une suite de fonctions $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en particulier de v.a., définies sur un même espace fondamental Ω. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers la fonction X (ou v.a.) sur $S \subseteq \Omega$ si

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega); \forall\omega \in S$$

c'est-à-dire

$$\forall\omega \in S, \forall\varepsilon > 0; \exists n_0 = n_0(\varepsilon, \omega)/\forall n \geq n_0; |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$$

Convergence en probabilité :

Définition :

Étant donnée une suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une v.a. X si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0; \lim_{n\to+\infty} P(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon) = 0$$

ou encore si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0; \lim_{n\to+\infty} P(|X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon) = 1.$$

On note $X_n \xrightarrow{P} X$

Convergence en probabilité :

Théorème 1 :

Soit f une fonction réelle définie et continue dans $\mathbb{R}$. Alors :
$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$

Théorème 2 :

Si la suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge en probabilité vers la variable aléatoire X et si $P(X_n = 0) = P(X = 0) = 0$, alors $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{X}$.

Corollaire 1 :

Il résulte des théorèmes précédents que si la suite des couples aléatoires $(X_n, Y_n)_n$ converge en probabilité vers le couple aléatoire (X, Y), alors :
$X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$, $\lambda X_n \xrightarrow{P} \lambda X$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$, $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{X}{Y}$ (si $P(Y_n = 0) = P(Y = 0) = 0$).

Convergence en probabilité :

Preuve du Théorème 1 :

Puisque X est une v.a., pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists k(\varepsilon)$ tel que $P(|X| > k) < \frac{\varepsilon}{2}$
(car $1 = \int_{\mathbb{R}} dF = \underbrace{\int_{|X|>k} dF}_{=P(|X|>k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \int_{|X|\leq k} dF$)

D'autre part, la fonction f continue dans $\mathbb{R}$, est alors uniformément continue dans $[-k, k]$ et par conséquent $\exists\delta(\varepsilon, k)$ tel que :
$|x| \leq k, |x_n - x| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$.
Donc, si on pose $A = \{|X| \leq k\}$, $B = \{|X_n - X| < \delta\}$,
$C = \{|f(X_n) - f(X)| < \varepsilon\}$. On a : $\omega \in A \cap B \Rightarrow \omega \in C$. Ainsi
$A \cap B \subset C$ et $P(\overline{C}) \leq P(\overline{A}) + P(\overline{B})$,
$P(|f(X_n) - f(X)| \geq \varepsilon) \leq P(|X| > k) + P(|X_n - X| \geq \delta)$
pour $n \geq N(\varepsilon, \delta, k)$ où $N(\varepsilon, \delta, k)$ est choisi de manière que
$P(|X_n - X| \geq \delta) < \frac{\varepsilon}{2}$
D'où $P(|f(X_n) - f(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ■

Convergence en probabilité :

Preuve du Théorème 2 :

Soit $\delta > 0$ et $a \geq 0$;

$P(\left|\frac{1}{X} - \frac{1}{X_n}\right| > \delta) = P(\left|\frac{X_n - X}{XX_n}\right| > \delta) = P(|X_n - X| > \delta |XX_n|)$

$= P(\{|X_n - X| > \delta|XX_n|\} \cap \{|XX_n| \leq a\}) +$

$+ P(\{|X_n - X| > \delta|XX_n|\} \cap \{|XX_n| > a\})$

$\leq P(|XX_n| \leq a) + P(|X_n - X| > \delta a)$

Or pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $a \geq 0$ et un entier n_0 tel que $n > n_0 \Rightarrow P(|XX_n| \leq a) < \frac{\varepsilon}{2}$; en effet le contraire entraînerait l'existence d'une suite n_k d'entiers tels que $P(|XX_{n_k}| = 0) \geq \frac{\varepsilon}{2}$

Or $P(|XX_n| = 0) \leq P(|X_n| = 0)$ qui tend vers zéro par hypothèse.

Il existe d'autre part un entier n_1 tel que

$n > n_1 \Rightarrow P(|X_n - X| > \delta a) < \frac{\varepsilon}{2}$

d'où $n > \sup(n_0, n_1) \Rightarrow P(\left|\frac{1}{X} - \frac{1}{X_n}\right| > \delta) < \varepsilon$ ■

Convergence en loi :

Définition :

Étant donnée une suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une v.a. X si la suite des fonctions de répartitions $(F_n(x))_n$ converge vers la fonction de répartition $F(x)$ de la v.a. X en chaque point x où $F(x)$ est continue.
On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Remarque 1 :

On ne suppose la convergence réalisée qu'aux points de continuité de F. En un point de discontinuité x_0 de F, $F_n(x_0)$ peut ne pas tendre vers aucune limite ou tendre vers une limite différente de $F(x_0)$.

Convergence en loi :

Remarque 2 :

La suite des fonctions de répartitions $(F_n(x))_n$ peut tendre vers une fonction qui n'est pas une fonction de répartition.

Remarque 3 :

La convergence en loi n'implique pas la convergence des moments.

Remarque 4 :

La convergence en loi n'implique pas la convergence des distributions (lois) des probabilités.

Convergence en loi :

Exemple 1 :

On ne suppose la convergence réalisée qu'aux points de continuité de F. En un point de discontinuité x_0 de F, $F_n(x_0)$ peut ne pas tendre vers aucune limite ou tendre vers une limite différente de $F(x_0)$.

Soit $X_n \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$. La fonction de répartition F_n de X_n est donnée par :

$$F_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-nt^2}{2}} dt$$

On a : $F_n(x) \to F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ La fonction F n'est pas la fonction de répartition d'une loi de probabimité (elle n'est pas continue à droite en 0).

Convergence en loi :

Exemple 1 :

Toutefois, en désignant par F_1 la fonction de répartition de la v.a. $X = 0$,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

La fonction F coincide avec F_1, sauf en $x = 0$, c'est-à-dire sauf au point de discontinuité de F_1. On a donc pour tout x où F_1 est continue, $F_n(x) \to F_1(x)$, ce qui montre que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$, (v.a. dégénerée en 0). Mais quelque soit $n, F_n(0) = \frac{1}{2} \neq F_1(0) = 1$.

Convergence en loi :

Exemple 2 :

La suite des fonctions de répartitions $(F_n(x))_n$ peut tendre vers une fonction qui n'est pas une fonction de répartition.

Prenons X_n uniformément répartie sur $[0, n]$, $(n \geq 1)$. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers une limite.

En effet, pour tout x réel et $n \geq 1$, on a :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{n}, & 0 \leq x < n \\ 1, & n \leq x \end{cases}$$

Il en résulte que pour tout x, on a : $F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F(x) = 0$.

Or la limite $F(x) = 0$ n'est pas la fonction de répartition d'une loi de probabilité.

Convergence en loi :

Exemple 3 :

La convergence en loi n'implique pas la convergence des moments

Soit F_n une suite de fonctions de répartition définie par :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{n}, & 0 \leq x < n \\ 1, & n \leq x \end{cases}$$

Il est clair que $F_n \to F$ où $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

Il est évident que F_n est la fonction de répartition de la v.a. X_n définie par : $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $P(X_n = n) = \frac{1}{n}$ et que F est la fonction de répartition de la v.a. X dégénerée en 0.

Donc $E(X_n^k) = n^k.\frac{1}{n} = n^{k-1}$ où $k \in \mathbb{Z}^+$ et $E(X^k) = 0$.

D'où $E(X_n^k) \nrightarrow E(X^k)\,;\ \forall k > 1$.

Convergence en loi :

Exemple 4 :

La convergence en loi n'implique pas la convergence des distributions (lois) des probabilités

Soit X_n une suite de v.a., de loi de probabilité suivante :

$$f_n(x) = P(X_n = x) = \begin{cases} 1, & \text{pour } x = 2 + \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Il est clair que $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x) = 0, \forall x$.

Pourtant, la fonction de répartition F_n de X_n donnée par :

$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2 + \frac{1}{n} \\ 1, & \text{si } x \geq 2 + \frac{1}{n} \end{cases}$ converge vers la fonction de répartition F de la v.a. X dégénerée en $x = 2$ donnée par : $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$

Convergence en loi :

Théorème de porte-manteau :

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On a :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall f \text{ fonction continue bornée}, E(f(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E(f(X))$$

Théorème de Paul-Levy :

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire. On a :

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$$

φ_X étant la fonction caractéristique de la variable aléatoire X. et Si (φ_n) une suite de fonctions caractéristiques qui converge vers une fonction φ dont la partie réelle est continue en 0, alors il existe une v.a. X telle que $\varphi = \varphi_X$ et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Convergence en loi :

Théorème 3 :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles. Alors,

$$X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$

Remarque 5 :

La réciproque du théorème 3 n'est pas, en général, vraie. Toutefois, lorsque X est dégénerée, elle est vraie.

Corollaire :

Soit k une constante. Alors, on a :

$$X_n \xrightarrow{P} k \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} k$$

Convergence en loi :

Exemple :

Soit $X, X_1, X_2, \cdots$ des variables aléatoires qui suivent la même loi définie par :

$X \quad \backslash \quad X_n$	0	1	$P(X = i)$
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$P(X_n = j)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Il est clair que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Pourtant $P(|X_n - X| > \frac{1}{2}) \geq P(|X_n - X| = 1)$

Or $P(|X_n - X| = 1) = P(X_n = 0, X = 1) + P(X_n = 1, X = 0) \nrightarrow 0$

D'où $X_n \overset{P}{\nrightarrow} X$

Convergence en loi :

Preuve du théorème 3 :

Pour tout $\eta > 0$, on a :

$P(X_n \leq x) = P(X_n \leq x, X \leq x + \eta) + P(X_n \leq x, X > x + \eta)$

$\leq P(X \leq x + \eta) + P(|X - X_n| > \eta)$

d'où $F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \eta) + P(|X - X_n| > \eta)$ (1)

On montre de façon analogue que

$F_X(x - \eta) \leq F_{X_n}(x) + P(|X - X_n| > \eta)$ (2)

(1) et (2)

$\Rightarrow F_X(x-\eta) - P(|X - X_n| > \eta) \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\eta) + P(|X - X_n| > \eta)$ (3)

Or on a trivialement que $F_X(x - \eta) \leq F_X(x) \leq F_X(x + \eta)$ (4)

(3) et (4) $\Rightarrow \forall n \geq 0$, et

$\forall \eta > 0, |F_X(x) - F_{X_n}(x)| \leq F_X(x + \eta) - F_X(x - \eta) + P(|X - X_n| > \eta)$

Supposons que x soit un point de continuité de F_X, alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon)$ tel que $F_X(x - \eta) - F_X(x + \eta) < \varepsilon$

Convergence en loi :

Preuve du théorème 3 : (suite)

Supposons que $X_n \xrightarrow{P} X$, alors on peut associer au couple $(\varepsilon, \eta(\varepsilon))$, un nombre $N(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall n \geq N$, on ait $P(|X - X_n| \geq \eta) < \varepsilon$.
Il en résulte que, si x est un point de continuité de F_X, on a, $\forall n \geq N$, l'inégalité $|F_X(x) - F_{X_n}| < 2\varepsilon$ ■

Théorème 4 :

Soit la suite de couples aléatoires $(X_n, Y_n)_n$. On a :
$|X_n - Y_n| \xrightarrow{P} 0$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$

Convergence en loi :

Théorème 5 :

Soit la suite de couples aléatoires $(X_n, Y_n)_n$ et soit C une constante. On a :

1. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X; Y_n \xrightarrow{P} C \Rightarrow X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + C$
2. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X; Y_n \xrightarrow{P} C \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} CX$, si $C \neq 0$.
3. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X; Y_n \xrightarrow{P} C \Rightarrow X_n Y_n \xrightarrow{P} 0$, si $C = 0$.
4. $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X; Y_n \xrightarrow{P} C \Rightarrow \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X}{C}$, si $C \neq 0$.

Théorème de Slutsky :

Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de variables aléatoires, X une variable aléaroire et $C \in \mathbb{R}$:

$$X_n \overset{\mathcal{L}}{\to} X; Y_n \overset{P}{\to} C \Rightarrow (X_n, Y_n) \overset{\mathcal{L}}{\to} (X, C)$$

Convergence presque sûre ou convergence forte :

Définition :

Étant donnée une suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement (p.s.) vers une v.a. X, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, si

$$P(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$$

ou encore

$$P(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)) = 0$$

i.e. $\exists N$ négligeable tel que $\forall \omega \notin N; X_n(\omega) \to X(\omega)$.
On note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$
En d'autres termes, l'ensemble des points de divergence est de probabilité nulle.

Convergence presque sûre ou convergence forte :

Remarques :

- Remarquons que la limite de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas unique, mais que deux limites sont presque sûrement égales. [Rappelons que X et Y sont égales presque sûrement si $P(\omega \in \Omega : X(\omega) \neq Y(\omega)) = 0$].
- On peut aussi dire, quitte à enlever un ensemble de mesure nulle (celui pour lequel $X_n(\omega)$ ne converge pas vers $X(\omega)$), que $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, si, et seulement si, X_n converge ponctuellement vers X, en tant que fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$.

Théorème 6 :

La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

Remarque :

La réciproque est inéxacte.

Convergence presque sûre ou convergence forte :

Théorème 7 :

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires positives et strictement décroissante. Alors, on a :

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{p.s.} 0$$

Convergence en moyenne d'ordre p :

Définition :

Étant donnée une suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que $E((X_n - X)^p)$ existe. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne d'odre p vers une v.a. X, d'éfinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, si

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0.$$

La plus utilisée est la convergence en moyenne quadratique (si $p = 2$).

Théorème 8 :

La converegence en moyenne d'odre p implique la convergence en probabilité.

Preuve :

(On utilise l'inégalité de Markov).

Convergence en moyenne quadratique :

Définition :

Étant donnée une suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que $E(|X|^2)$ existe. On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers une v.a. X, d'éfinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, si

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^2) = 0.$$

On note $X_n \xrightarrow{m.q.} X$

Théorème 9 :

$$X_n \xrightarrow{m.q.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$$

Remarque :

La réciproque est inéxacte.

Convergence en moyenne quadratique :

Remarques :

- La convergence en moyenne quadratique n'implique pas la convergence presque sûre.
- La convergence presque sûre n'implique pas la convergence en moyenne quadratique.

Convergence en moyenne quadratique :

Théorème 10 :

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires convergeante en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X, alors :

$$E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E(X)$$

$$E(X_n^2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E(X^2)$$

Corollaire :

1. $X_n \xrightarrow{m.q.} X \Rightarrow Var(X_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Var(X)$
2. $X_m \underset{m\to+\infty}{\xrightarrow{m.q.}} X; Y_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{m.q.}} Y \Rightarrow E(X_mY_n) \underset{m,n\to+\infty}{\longrightarrow} E(XY)$

Résumé :

$$\boxed{\text{Convergence en moyenne d'odre } p}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Convergence en moyenne d'odre } p', (p' < p)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Convergence presque sûre}} \Rightarrow \boxed{\text{Convergence en probabilité}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Convergence en loi}}$$

Exercices :

Exercice 1 :

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X, et si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0, le produit X_nY_n converge en loi vers 0. Donner une condition moins restrictive sur la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permettant d'obtenir le même résultat.
2. En déduire que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une constante a, la suite (X_nY_n) converge en loi vers aX.
3. En déduire que si les suites (X_n) et (Y_n) convergent en probabilité respectivement vers X et Y, le produit (X_nY_n) converge en probabilité vers XY.