Chapitre 1: Exercices

Prof. Mohamed El Merouani

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques
https://elmerouani.jimdofree.com/calcul-des-probabilités

2020/2021

Exercices :

Exercice 1 :

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X, et si $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0, le produit X_nY_n converge en loi vers 0. Donner une condition moins restrictive sur la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permettant d'obtenir le même résultat.
2. En déduire que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une constante a, la suite (X_nY_n) converge en loi vers aX.
3. En déduire que si les suites (X_n) et (Y_n) convergent en probabilité respectivement vers X et Y, le produit (X_nY_n) converge en probabilité vers XY.

Exercices :

Exercice 2 :

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ convergeant en loi respectivement vers X et Y.

1. On suppose que pour tout n, X_n et Y_n sont indépendantes et que X et Y sont indépendantes. Démontrer que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$. Donner un exemple montrant que l'hypothèse d'indépendance est indispensable.
2. On suppose que $Y = 0$. Prouver que $X_n + Y_n$ converge en loi vers X et X_nY_n converge en loi vers 0.

Exercices :

Exercice 3 :

Soit une suite de couples aléatoires $(X_n, Y_n)_n$ qui converge en probabilité vers le couple aléatoire (X, Y) (c'est-à-dire que $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$). Montrer que :

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$
2. $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$

Exercices :

Exercice 4 :

Soit une suite de couples aléatoires $(X_n, Y_n)_n$ telle que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} 0$ (La variable X étant définie sur le même espace probabilisé que les X_n). Montrer que :

1. $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
2. $X_n Y_n \xrightarrow{P} 0.$

Corrigés :

Corrigé de l'exercice 1 :

1) • Nous savons que $X_nY_n \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow X_nY_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$
$P(|X_nY_n| > \varepsilon) = P(|Y_n| > \frac{\varepsilon}{|X_n|})$
Soit un réel $M > 0$, on a :
$P(|X_nY_n| > \varepsilon) = P(\{|Y_n| > \frac{\varepsilon}{|X_n|}\} \cap \{|X_n| \leq M\}) +$

$$+P(\{|Y_n| > \frac{\varepsilon}{|X_n|}\} \cap \{|X_n| > M\})$$

or $\{|Y_n| > \frac{\varepsilon}{|X_n|}\} \cap \{|X_n| \leq M\} \subset \{|Y_n| > \frac{\varepsilon}{M}\}$
donc $P(|X_nY_n| > \varepsilon) \leq P(|Y_n| > \frac{\varepsilon}{M}) + P(|X_n| > M)$
choisissons un nombre M tel que M et $-M$ soient des points de continuité de la fonction de répartition de X et que $P(|X| > M) < \frac{\varepsilon}{3}$;
Comme $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n > n_0$ implique
$|P(|X_n| > M) - P(|X| > M)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Corrigés :

Corrigé de l'exercice 1 :

Comme $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que $n > n_1$ implique
$P(|Y_n| > \frac{\varepsilon}{M}) < \frac{\varepsilon}{3}$
Si $n > \sup(n_0, n_1)$, $P(|X_nY_n| > \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
Donc la suite (X_nY_n) converge en probabilité et donc en loi vers 0.

• La condition sur (X_n) qu'on avait était $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et que l'on a utilisé seulement pour minorer l'expression $P(|X_n| > M) < \varepsilon$; le résultat reste vrai donc sous la seule condition :

$$\forall \varepsilon \exists M \exists n_0 \text{ tels que } \Rightarrow P(|X_n| > M) < \varepsilon;$$

intuitivement, il ne faut pas qu'il y ait "fuite" de probabilité à l'infini.

Corrigés :

Corrigé de l'exercice 1 :

2) Par hypothèse $Y_n - a$ converge en loi vers 0 ; d'après 1)
$X_n(Y_n - a) = X_nY_n - aX_n$ converge en loi vers 0.
Soit $\mathcal{L}$ une distance de la convergence en loi ; ce qui précède s'exprime
$\mathcal{L}(X_nY_n, aX_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et comme
$\mathcal{L}(X_nY_n, aX) \leq \mathcal{L}(X_nY_n, aX_n) + \mathcal{L}(aX_n, aX)$, il résulte que
$\mathcal{L}(X_nY_n, aX) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3) On a $(X_nY_n - XY) = (X_n - X)Y_n + X(Y_n - Y)$;
comme $X_n - X$ et $Y_n - Y$ tendent en probabilité, donc en loi, vers 0, donc, d'après 1) on obtient que $(X_n - X)Y_n$ et $X(Y_n - Y)$ tendent en probabilité vers 0, d'où le résultat.

Corrigés :

Corrigé de l'exercice 2 :

1) • On utilise les fonctions caractéristiques :

$$\begin{aligned} E\left(e^{it(X_n+Y_n)}\right) &= E\left(e^{itX_n}\right)E\left(e^{itY_n}\right) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E\left(e^{itX}\right)E\left(e^{itY}\right) \\ &= E\left(e^{it(X+Y)}\right) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ indépendantes.} \end{aligned}$$

Donc $(X_n+Y_n)_n$ converge en loi vers $X+Y$.

• Exemple montrant que l'hypoyhèse d'indépendance est indispensable :

Soit une v.a. $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et on pose $X_n = X$ et $Y_n = -X$.

On a ainsi $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $X_n + Y_n = 0$

Corrigés :

Corrigé de l'exercice 2 :

2) • $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall \varepsilon > 0$

$\{X_n \leq x - \varepsilon\} \cap \{|Y_n| \leq \varepsilon\} \subset \{X_n + Y_n \leq x\}$

En considérant les événements contraires, on aura :

$\{X_n + Y_n > x\} \subset \{X_n > x - \varepsilon\} \cup \{|Y_n| > \varepsilon\}$

Si on prend les probabilités, on aura :

$P(X_n + Y_n > x) \leq P(X_n > x - \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon)$

donc $P(X_n \leq x - \varepsilon) \leq P(X_n + Y_n \leq x) + P(|Y_n| > \varepsilon)$

d'où $\quad F_{X_n}(x - \varepsilon) \leq F_{X_n+Y_n}(x) + P(|Y_n| > \varepsilon) \quad$ (a)

De même, on montre que $F_{X_n+Y_n}(x) \leq F_{X_n}(x + \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon)$ (b)

De (a) et (b), on obtient :

$F_{X_n}(x - \varepsilon) - P(|Y_n| > \varepsilon) \leq F_{X_n+Y_n}(x) \leq F_{X_n}(x + \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon)$

La fonction F_{X_n} étant croissante, on déduit l'encadrement :

$|F_{X_n+Y_n}(x) - F_{X_n}(x)| \leq F_{X_n}(x + \varepsilon) - F_{X_n}(x - \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon)$

Corrigés :

Corrigé de l'exercice 2 :

On considère alors x point de continuité de F_X. On peut choisir ε aussi petit que l'on veut avec de plus $x-\varepsilon$ et $x+\varepsilon$ points de continuité de F_X et $F_X(x+\varepsilon)-F_X(x-\varepsilon)$ arbitrairement petit. Pour de tels x et ε, on a : $\lim_n |F_{X_n+Y_n}(x)-F_X(x)| \leq F_X(x+\varepsilon)-F_X(x-\varepsilon)$
On en déduit que $F_{X_n+Y_n}(x) \to F_X(x)$
et $X_n+Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Corrigés :

Corrigé de l'exercice 2 :

• On va montrer, maintenant, que le produit X_nY_n converge en probabilité vers 0.

Pour tout entier k

$\{|X_n| < k\} \cap \{|Y_n| < \frac{1}{k^2}\} \subset \{|X_nY_n| < \frac{1}{k}\}$

et donc $\{|X_nY_n| \geq \frac{1}{k}\} \subset \{|X_n| \geq k\} \cup \{|Y_n| \geq \frac{1}{k^2}\}$

Il s'en suit $P(|X_nY_n| \geq \frac{1}{k}) \leq P(|X_n| \geq k) + P(|Y_n| \geq \frac{1}{k^2})$

Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(X_n)_n$ étant convergente en loi, donc, quel que soit n, $P(|X_n| \geq k) < \varepsilon$, si k est suffisamment grand. D'autre part, la suite $(Y_n)_n$ convergente en loi vers une constante, converge en probabilité vers cette constante, donc $P(|Y_n| \geq \frac{1}{k^2}) < \varepsilon$ si n suffisamment grand.

Finalement, $\forall k \in \mathbb{N}, P(|X_nY_n| \geq \frac{1}{k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la suite (X_nY_n) converge en probabilité, et donc en loi, vers 0.

Corrigés :

Corrigé de l'exercice 3 :

1) Considérons l'inégalité suivante, valable pour tout $n \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$:
$P(|X_n + Y_n - X - Y| > 2\varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \varepsilon) + P(|Y_n - Y| > \varepsilon)$
Le résultat en découlent en laissant ε fixe et en faisant tendre n vers l'infini.
2) Considérons l'inégalité suivante, valable pour tout $n \geq 1$ et tout $\varepsilon > 0$:
$P(|X_n Y_n - XY| > 3\varepsilon) \leq P(|X_n - X||Y| > \varepsilon) + P(|Y_n - Y||X| > \varepsilon) + P(|X_n - X||Y_n - Y| > \varepsilon)$
Majorons le premier terme du second membre ; on a pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $A > 0$:
$P(|X_n - X||Y| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{A}) + P(|Y| > A)$

Corrigés :

Corrigé de l'exercice 3 :

On peut choisir A assez grand pour que $P(|Y| > A) < \eta$; le nombre A étant ainsi choisi, on peut prendre n assez grand pour que $P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{A})$, de sorte que $P(|X_n - X||Y| > \varepsilon) < 2\eta$.
Le deuxième terme du second membre se traite de la même façon.
Enfin, le troisième terme du second membre tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, puisque
$P(|X_n - X||Y_n - Y| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \sqrt{\varepsilon}) + P(|Y_n - Y| > \sqrt{\varepsilon})$

Corrigés :

Corrigé de l'exercice 4 :

1) On a, comme vue dans un exercice avant, pour tout $\eta > 0$, l'inégalité :
$|F_{X_n+Y_n}(x) - F_{X_n}(x)| \leq F_{X_n}(x+\eta) - F_{X_n}(x-\eta) + P(|Y_n| > \eta)$
On conclut, en prenant pour $x, x-\eta, x+\eta$ $(\eta > 0)$ des points de continuité de la fonction de répartition F de X et en laissant tendre n vers l'infini.
2) On a, pour tout $A > 0$ et tout $\varepsilon > 0$,
$P(|X_nY_n| > A\varepsilon) \leq P(|X_n| > A) + P(|Y_n| > \varepsilon)$
Puisque $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ (où X est une v.a.), le premier terme du second membre peut être rendu inférieur à η pour A, n assez grands.
Puisque $Y_n \xrightarrow{P} 0$, le second terme tend vers 0, lorsque n tend vers l'infini.
Ces deux points permettent de conclure.