Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2020/2021
Masters MAF et MAP
Semestre 1

Contrôle de Probabilités

Durée: 1h30

Exercice 1 : (8 points)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, de même loi et de fonction de répartition F. Définissons une autre suite de variables aléattoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$Y_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i \leqslant x\}}$, pour chaque $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, Y_n(x) \underset{n\to+\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} F(x)$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, Y_n(x) \underset{n\to+\infty}{\overset{p.s.}{\longrightarrow}} F(x)$.
3. Montrer que, pour un x fixé, $\frac{\sqrt{n}(Y_n(x)-F(x))}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 2 : (12 points)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire, définies toutes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
• On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy presque sûrement, s'il existe un ensemble N négligeable, pour tout $\omega \notin N$; on ait $\lim\limits_{n,m\to+\infty} |X_n(\omega) - X_m(\omega)| = 0$,
ou encore, si $\forall\varepsilon > 0, P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geqslant n} \{|X_n - X_m| < \varepsilon\}) = 1$.
• On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en probabilité, si
$\forall\varepsilon > 0, \lim\limits_{n,m\to+\infty} P(|X_n - X_m| \geqslant \varepsilon) = 0$,
ou encore, si $\forall\varepsilon > 0, \exists m, \forall n \geqslant m, P(|X_n - X_m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon$.
• On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy en moyenne d'ordre $r > 0$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(|X_n|^r)$ soit fini, si $\lim\limits_{n,m\to+\infty} E(|X_n - X_m|^r) = 0$.

1. Montrer que $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers X si, et seulement si, $(X_n)_n$ est de Cauchy presque sûrement.
2. Montrer que si $(X_n)_n$ converge vers X en probabilité, alors il existe une suite extraite (X_{n_k}) qui converge vers X presque sûrement.
   Indication :
   On peut montrer qu'il existe une suite strictement croissant d'entiers $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots$ telle que pour tout $k \geqslant 1$ on ait $P\left(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$. Puis poser, pour tout $k \geqslant 1$, $Y_k = X_{n_k}$ et montrer que la suite $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers X.
3. Montrer que $(X_n)_n$ converge, en probabilité, vers X si, et seulement si, $(X_n)_n$ est de Cauchy en probabilité.
4. Montrer que $(X_n)_n$ converge, en moyenne d'ordre r, vers X si, et seulement si, $(X_n)_n$ est de Cauchy en moyenne d'ordre r.

Bonne Chance !