Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
Master M.A.F.
Simulation Monte-Carlo

Contrôle de la session normale

Durée: 1heure 30 min

Exercice 1 : (2 points)
Prouver que la méthode des variables antithétiques peut être considérée comme un cas particulier de celle de variable de contrôle.

Exercice 2 : (3 points)
Soit X une variable aléatoire de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$ de densité $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}(x \in \mathbb{R})$. Appliquer la méthode de l'échantillonnage préférentiel ("importance simpling") pour estimer $\theta = P(X > 2)$.

Exercice 3 : (3 points)
Calculer par deux méthodes de Monte-Carlo différentes l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e - 1} dx$$

et donner une estimation des erreurs.

Exercice 4 : (4 points)
Appliquer la méthode d'inversion pour obtenir un procédé de simulation d'une variable aléatoire de fonction densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 2p \text{ ou } x \geqslant 2q \\ \frac{x-2p}{(q-p)^2} & si \quad 2p \leqslant x < p+q \\ \frac{2q-x}{(q-p)^2} & si \quad p+q \leqslant x < 2q \end{cases}$$

Exercice 5 : (3 points)
Donner un procédé basé sur la méthode d'acceptation-rejet pour générer des valeurs à partir de

$$f(x) = \frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - x^2}, -r \leqslant x \leqslant r.$$

Donner le nombre moyen de tests et l'efficience (l'efficacité).

Exercice 6 : (5 points)
Soit $E_1, E_2, \cdots$ une suite de variables aléatoires exponentielles de paramètre 1, vérifier que la variable aléatoire N dont la valeur est l'indice n tel que

$$E_1 + E_2 + \cdots + E_n \leqslant \lambda < E_1 + E_2 + \cdots + E_{n+1}$$

suit une loi de Poisson de paramètre λ. On calculera d'abord $P(N = n/E_1, \cdots, E_n)$; pour cela on pourra démontrer et utiliser que $\int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbb{I}_{x_1+\cdots+x_n<1} dx_1 \cdots dx_n = \frac{1}{n!}$ (La démonstration peut se faire par changement de variables en introduisant les sommes partielles).
En déduire une méthode pour simuler une loi de Poisson. Cette méthode n'est utilisée pour λ relativement petit ; pourquoi ?

Bonne chance !