Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
Master M.A.F.
Simulation Monte-Carlo

Contrôle de Rattrapage

Durée: 1heure 30 min

Exercice 1 : (2 points)
Utiliser l'échantillonnage préférentiel pour évaluer la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Exercice 2 : (3 points)
On considère la densité $f(x,y) = xe^{-xy}\mathbb{I}_{\{y>0\}}\mathbb{I}_{\{0<x<1\}}$ et un couple de variables aléatoires (X,Y) suivant cette loi.

1. Quelle est la loi de Y sachant $X = x$?
2. Quelle est la loi de X ?
3. Proposer un procédé de simulation de (X,Y).

Exercice 3 : (3 points)
Estimer les intégrales suivantes à l'aide de la méthode de Monte-Carlo :

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx$
2. $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$

Exercice 4 : (4 points)
En utilisant l'algorithme de Metropolis-Hastings, estimer l'intégrale

$$K = \int\int_{x^2+y^2 \leqslant \pi} \frac{\sin(x^2+y^2)}{1+x^2+y^2} dxdy$$

Exercice 5 : (3 points)
Construire un algorithme pour générer à partir de la loi logistique de densité

$$f(x) = \frac{\exp\left[-(x-\alpha)/\beta\right]}{\beta\{1+\exp[-(x-\alpha)/\beta]\}^2}, -\infty < x < \infty, \alpha, \beta > 0$$

Exercice 6 : (5 points)
On veut estimer $P(X+Y>3)$ où X et Y sont deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres λ et μ respectivement. Proposer une méthode de variables antithétiques, puis une méthode qui combine le conditionnement et les variables antithétiques.

Bonne chance !