Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2021/2022
Masters MAF et MAP
Semestre 1

Rattrapage de Probabilités

Durée: 1h30

Exercice 1 : (4 points)
Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$, $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies toutes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que si $(X_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire X et que $(Y_n)_n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire égale presque sûrement à une constante c, alors la suite couple $(X_n, Y_n)_n$ converge en loi vers le couple (X, c).
2. On suppose que $(X_n)_n$ converge en loi vers la variable aléatoire X et que $(Y_n)_n$ converge en probabilité vers zéro. Montrer que la suite somme $(X_n + Y_n)_n$ converge en loi vers X.

Exercice 2 : (6 points)
Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

1. Donner la loi de S_n, son espérance mathématique et sa variance.
2. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z.
3. Retrouver la formule de Stirling : lorsque $n \to +\infty$, $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Exercice 3 : (10 points)
I.- Soit X une variable aléatoire positive de carré intégrable sur espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et soit $\lambda \in]0,1[$.

1. Démontrer que $(1-\lambda)E(X) \leqslant E(X\mathbb{I}_{[\lambda E(X), \infty[}(X))$,
2. En déduire, par l'inégalité de Cauchy-Shwarz, que $P(X \geqslant \lambda E(X)) \geqslant (1-\lambda)^2 \frac{E(X)^2}{E(X^2)}$.

II.- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On pose $A = \bigcap_{n\geqslant 0}(\bigcup_{k\geqslant n} A_k) = \limsup_n A_n$.

1. Montrer que si la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ converge, alors $P(A) = 0$.
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire discrète.
   Pour $\varepsilon > 0$, on pose $A_n(\varepsilon) = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$.
   Montrer que si pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n(\varepsilon))$ converge, alors la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge presuqe sûrement vers X.
3. On suppose que les évènements A_n sont indépendantes, montrer que si la série $\sum_{n\geqslant 0} P(A_n)$ diverge alors $P(A) = 1$.

III.-

1. Montrer que si $\sum_{n\geqslant 1} P(A_n) = \infty$ et $\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} P(A_i \bigcap A_j)}{(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} P(A_i))^2} = 1$ alors $P(A) = 1$.
   Indication : On peut appliquer les inégalités de la question (I) à $X = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbb{I}_{A_i}$ pour tout $n \geqslant 1$ pour démontrer que $\sum_{i\geqslant 1} \mathbb{I}_{A_i} = \infty$ p.s.
2. Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} P(A_n) = \infty$ et $P(A_i \bigcap A_j) \leqslant cP(A_i)P(A_j)$ pour un $c > 0$ et tous $i \neq j$, alors $P(A) > 0$.

Bonne Chance !