www.elmerouani.jimdo.com

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année Universitaire : 2013/2014
LEF Sc. Éco. & Gestion
Semestre : Sixième (S6)
Parcours : Gestion

Contrôle d'Analyse de données

Analyse des données

Durée : 1 heure 30 min

Problème n°1 :

On donne X, la matrice des données de type (2,3), suivante:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On veut réaliser une Analyse en Composantes Principales (ACP) **non normée** sur X :

1°) Calculer le produit matriciel $X'X$, où X' est la transposée de la matrice X.

2°) Quelle est l'inertie totale du nuage de points de X ?

3°) Chercher les valeurs propres de la matrice $X'X$. On note λ_1 , λ_2, λ_3, … ses valeurs propres avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, …

4°) Retrouver l'inertie totale du nuage de points de X et déterminer la contribution de chaque individu à cette inertie totale.

5°) Déterminer F_i les axes factoriels. Donner le vecteur unitaire u_i de chaque axe F_i. Vérifier que ces axes sont perpendiculaires.

Problème n°2 :

On considère le tableau de contingence suivant obtenu au cours d'une enquête sur un échantillon de taille 120 :

pluriel

	Ensemble J (paramètres)	
Ensemble I (Individus)	30	20
	20	10
	10	30

Réaliser une Analyse Factorielle des Correspondances (AFC) sur ces données, en répondant aux questions suivantes :

1°) Donner le tableau des probabilités conjointes et marginales, associé au tableau précédent.

2°) Dans l'espace IR^2, on représente un nuage $B(I)$ des points M_i avec $i \in I$ de coordonnées suivant des axes normalisés.

1,5 a) Donner tous les points M_i du nuage $B(I)$ en explicitant leurs coordonnées.

1,5 b) Calculer la distance χ^2 entre les différentes paires des points de nuage $B(I)$.

3°) 1 a) Déterminer la matrice des variances-covariances W du nuage $B(I)$.

1 b) Déterminer les valeurs propres de la matrice W.

1 c) En déduire la variabilité totale du nuage $B(I)$.

4°) On projette, maintenant, le nuage $B(I)$ orthogonalement sur un axe, et on note $C(I)$ le nuage projeté. Donner la variabilité totale de nuage projeté $C(I)$.

5°) Calculer la variabilité expliquée par la projection du nuage $B(I)$.

Bonne chance !

®Elmerouani FST Tetouan

www.elmerouani.jimdo.com

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année Universitaire : 2013/2014
LEF Sc. Éco. & Gestion
Semestre : Sixième (S6)
Parcours : Gestion

Corrigés du contrôle d'Analyse de données

Analyse des données

Problème n°1 :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1°) $$X'X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2°) L'inertie totale du nuage de points de X est : $I_g = tr(X'X) = 2+1+1 = 4$

3°) $$\det(X'X - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

On développe suivant la 3ème colonne :

$$(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -(1-\lambda) + (1-\lambda)\left[1 - 3\lambda + \lambda^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda(1-\lambda)(\lambda-3) = 0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3; \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 0$$

4°) L'inertie totale du nuage de points de X est : $I_g = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3+1+0 = 4$

$$C_{IT1} = \frac{\lambda_1}{I_g} = \frac{3}{4} = 75\%$$

$$C_{IT2} = \frac{\lambda_2}{I_g} = \frac{1}{4} = 25\%$$

$$C_{IT3} = \frac{\lambda_3}{I_g} = \frac{0}{4} = 0\%$$

5°) Les sous-espaces propres et donc les axes Factoriels associés aux valeurs propres trouvés sont :

Pour $\lambda_1 = 3$;

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y - z = x \\ -x = 2y \\ -x = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-1}{2}x \\ z = \frac{-1}{2}x \\ x\,(quelconque) \in IR \end{cases}$$

D'où $$F_{\lambda_1} = \left\{\left(x, \cancel{+}\,\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}x\right) / x \in IR\right\} = \left\{x\left(1, \cancel{+}\,\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) / x \in IR\right\}$$

$(-2, 1, 1)$

$$\|(-2,1,1)\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

®El Merouani FST Tetouan

$F_{\lambda 1}$ est un espace vectoriel de dimension 1 (c'est une droite vectoriel, un axe, le premier axe principal). Un vecteur unitaire de $F_{\lambda 1}$ est $u_1 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{6};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, sa norme est $\|u_1\| = \sqrt{\frac{6}{9}+\frac{6}{36}+\frac{6}{36}} = 1$.

$\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

Pour $\lambda_2=1$, alors $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

avec x,y et z sont les coordonnées du vecteur propre cherché.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-y-z=x \\ -x+y=y \\ -x+z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+z \\ \\ x=0 \end{cases}$$

$(0,-1,1)$

D'où $F_{\lambda_2} = \{(0, y, -y)/\ y \in IR\} = \{y(0,1,-1)/\ y \in IR\}$

$F_{\lambda 2}$ est un espace vectoriel de dimension 1 (c'est une droite vectoriel, un axe, le deuxième axe principal). Un vecteur unitaire de $F_{\lambda 2}$ est $u_2 = \left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, sa norme est $\|u_2\| = \sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} = 1$.

$\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Pour $\lambda_3=0$, alors si on note x,y et z les coordonnées du vecteur propre cherché.

$$\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ -x+y=0 \\ -x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=y+z \\ x=y \\ x=z \end{cases}$$

D'où $F_{\lambda_3} = \{(z,z,z)/\ z \in IR\} = \{z(1,1,1)/\ z \in IR\}$

$F_{\lambda 3}$ est un espace vectoriel de dimension 1 (c'est une droite vectoriel, un axe, le troisième axe principal). Un vecteur unitaire de $F_{\lambda 3}$ est $u_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, sa norme est $\|u_3\| = \sqrt{\frac{3}{9}+\frac{3}{9}+\frac{3}{9}} = 1$.

Les axes sont effectivement perpendiculaires :

$$u_1.u_2 = 0+\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right).\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right).\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$u_1.u_3 = 0+\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right).\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right).\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$$

$u_1 . u_2 = 0 + -\frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$u_1 . u_3 = -\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

$= 0$

® El Merouani FST Tetouan

$u_2.u_3 = 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$; $u_2.u_3 = 0 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$

Problème n°2 :

1°) Le tableau des probabilités conjointes et marginales, associé au tableau de contingence est :

a)

$$X = \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 20 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \quad \text{de type } (3,2) \quad (n, m)$$

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{5}{12} \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \hline \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \end{array}$$

c'est mieux de le présenter comme un tableaux

2°) Nuage $\mathcal{B}(I)$ des points M_i avec $i \in I$

a) les points M_i de coordonnées (β_{i1}, β_{i2})

$M_1 = (\beta_{11}, \beta_{12})$; $M_2 = (\beta_{21}, \beta_{22})$; $M_3(\beta_{31}, \beta_{32})$

avec $\beta_{ij} = \dfrac{p_{ij}}{p_{i.}\sqrt{p_{.j}}}$

$$M_1 = \left(\frac{p_{11}}{p_{1.}\sqrt{p_{.1}}} ; \frac{p_{12}}{p_{1.}\sqrt{p_{.2}}}\right) = \left(\frac{1/4}{\frac{5}{12}\sqrt{1/2}} ; \frac{1/6}{\frac{5}{12}\sqrt{1/2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{5}{3\sqrt{2}}} ; \frac{1}{\frac{5}{2\sqrt{2}}}\right) = \boxed{\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} ; \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)}$$

®ElMerouani EST Tetouan

www.elmerouani.jimdo.com

$$M_2 = \left(\frac{P_{21}}{P_{2\cdot}\sqrt{P_{\cdot 1}}} ; \frac{P_{22}}{P_{2\cdot}\sqrt{P_{\cdot 2}}} \right) = \left(\frac{1/6}{1/4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} ; \frac{1/12}{1/4 \, \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} ; \frac{\sqrt{2}}{3} \right).$$

$$M_3 = \left(\frac{P_{31}}{P_{3\cdot}\sqrt{P_{\cdot 1}}} ; \frac{P_{32}}{P_{3\cdot}\sqrt{P_{\cdot 2}}} \right) = \left(\frac{1/12}{1/3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} ; \frac{1/4}{1/3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} ; \frac{3\sqrt{2}}{4} \right).$$

b) Distance χ^2 entre les différentes paires des points M_i :

Entre M_i et $M_{i'}$ $\Rightarrow d^2(M_i, M_{i'}) = \sum_j (\beta_{ij} - \beta_{i'j})^2$

$$d^2(M_1, M_2) = (\beta_{11} - \beta_{21})^2 + (\beta_{12} - \beta_{22})^2$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right)^2$$

$$= \frac{4}{225}.$$

$$d^2(M_1, M_3) = (\beta_{11} - \beta_{31})^2 + (\beta_{12} - \beta_{32})^2$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{3\sqrt{2}}{4} \right)^2$$

$$= \frac{49}{100}.$$

® Elmerouani ENSI Tetouan

www.elmerouani.jimdo.com

$$d^2(M_2, M_3) = (\beta_{21} - \beta_{31})^2 + (\beta_{22} - \beta_{32})^2$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{100}{144}$$

$$= \frac{25}{36}$$

3°) a) <u>Matrice des variances-covariances W du nuage $B(I)$:</u>

$$W = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

$$v_{11} = p_{1.}\left(\beta_{11} - \sqrt{p_{.1}}\right)^2 + p_{2.}\left(\beta_{21} - \sqrt{p_{.1}}\right)^2 + p_{3.}\left(\beta_{31} - \sqrt{p_{.1}}\right)^2$$

$$= \frac{5}{12}\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{23}{360}$$

®ElMerouani Tetouan

www.elmerouani.jimdo.com

$$v_{12} = v_{21} = p_{1.}\left(\beta_{11} - \sqrt{p_{.1}}\right)\left(\beta_{12} - \sqrt{p_{.2}}\right) + p_{2.}\left(\beta_{21} - \sqrt{p_{.1}}\right)\left(\beta_{22} - \sqrt{p_{.2}}\right)$$

$$+ p_{3.}\left(\beta_{31} - \sqrt{p_{.1}}\right)\left(\beta_{32} - \sqrt{p_{.2}}\right)$$

$$= \frac{5}{12}\left(\frac{3\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-23}{360}$$

$$v_{22} = p_{1.}\left(\beta_{12} - \sqrt{p_{.2}}\right)^2 + p_{2.}\left(\beta_{22} - \sqrt{p_{.2}}\right)^2 + p_{3.}\left(\beta_{32} - \sqrt{p_{.2}}\right)^2$$

$$= \frac{5}{12}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{23}{360}$$

© El Merouani FST Tetouan

www.elmerouani.jimdo.com

$$V_{22} = \frac{5}{12}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{23}{360}$$

D'où $$W = \begin{pmatrix} \frac{23}{360} & \frac{-23}{360} \\ \frac{-23}{360} & \frac{23}{360} \end{pmatrix}$$

b) <u>Valeurs propres de W</u> :

$$\det(W - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{23}{360} - \lambda & \frac{-23}{360} \\ \frac{-23}{360} & \frac{23}{360} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{23}{360} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{-23}{360}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda\left(\frac{23}{180} - \lambda\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{23}{180} \quad ; \quad \lambda_2 = 0$$

®ElMerouani FSJ Tetouan

$$\Rightarrow \lambda_{max} = \frac{23}{180}$$

c) <u>Variabilité totale de $\mathcal{B}(I)$</u> :

$$V_B = tr(W) = \frac{23}{360} + \frac{23}{360} = \frac{23}{180}$$

4°) <u>Variabilité totale de $\mathcal{C}(I)$</u> :

$$V_C = \lambda_{max} = \frac{23}{180}$$

5°) <u>Variabilité expliquée</u> est :

$$\delta = \frac{V_C}{V_B} = \frac{\lambda_{max}}{tr(W)} = 1$$

®ElMerouani FST Tetouan