Corrigés

Exercice 1 :
On a :

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} \propto f(x,y) \propto \exp(-x(1+y^2))$$

$$f(y/x) \propto f(x,y) \propto \exp(-xy^2)$$

avec lequel

$$x/y \sim \mathcal{E}xp(1+y^2)$$

$$y/x \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 = \frac{1}{2x})$$

et l'échantillonnage de Gibbs devient :

```
Choisir une valeur initiale Y_0, j = 1
Répéter
    Générer X_j ~ Exp(1 + (Y_{j-1})^2)
    Générer Y_j ~ N(0, 1/(2X_j))
j = j + 1
```

Exercice 2 :
Première méthode :

$$I = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi} \sin(x^4) e^{-2x} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$I = E\left(\sqrt{2\pi} \sin(Z^4) e^{-2Z} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(Z)\right) \quad \text{avec} \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Si, nous tirons $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ i.i.d. de même loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2\pi} \sin(Z_i^4) e^{-2Z_i} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(Z_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} I$$

Deuxième méthode :

$$I = \int_{\mathbb{R}} \sin(x^4) e^{-x^2/2} \frac{1}{2} \times 2\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x) e^{-2x} dx$$

$$I = E\left(\sin(Y^4) e^{-Y^2/2} \frac{1}{2}\right) \quad \text{avec} \quad Y \sim \mathcal{E}xp(2)$$

Si, nous tirons $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ i.i.d. de même loi $\mathcal{E}xp(2)$, alors

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \sin(Y_i^4) e^{-Y_i^2/2} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} I$$

Exercice 3 :
On propose d'utiliser la méthode d'inversion. Cherchons, alors, la fonction de répartition :
Soit $x \geqslant 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \alpha\beta t^{\beta-1}\exp(-\alpha t^{\beta})\mathbb{I}_{]0,+\infty[}(t)dt$$

$$F(x) = \int_{0}^{x} \alpha\beta t^{\beta-1}\exp(-\alpha t^{\beta})dt = [-e^{-\alpha t^{\beta}}]_0^x = -e^{-\alpha x^{\beta}} + 1$$

Donc $F(x) = (1 - e^{-\alpha x^{\beta}})\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)$. On cherche, ensuite, le pseudo-inverse de F,
si $u \in [0,1]$, on cherche x tel que $F(x) = u$,
ce qui revient à $x = \left(-\frac{1}{\alpha}\ln(1-u)\right)^{1/\beta}$
Pour simuler suivant la loi de X,
on tire $U \sim \mathcal{U}([0,1])$
et on revient $X = \left(-\frac{1}{\alpha}\ln(1-U)\right)^{1/\beta}$
ou bien $X = \left(-\frac{1}{\alpha}\ln(U)\right)^{1/\beta}$
puisque $1 - U \sim \mathcal{U}([0,1])$

Exercice 4 :
Soit $Y \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$. Soit $X = [Y]$. Alors,

$$\begin{aligned} P(X = k) = P(k \leqslant Y < k+1) &= \int_{k}^{k+1} \lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} \\ &= (e^{-\lambda})^k(1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

pour $k = 0, 1, 2, \cdots$, est la fonction de loi de probabilité géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$. En prenant $\lambda = -\ln(1-p)$, on remarque l'expression de la loi trouvée est identique à la fonction de probabilit d'une loi géométrique de paramètre p. Donc

$$X = \left[\frac{\ln U}{\ln(1-p)}\right] = \left[\frac{-V}{\ln(1-p)}\right]$$

où $V = -\ln U \sim \mathcal{E}xp(1)$. On conclut que pour générer une variable géométrique de paramètre p, on génére d'abord, une variable exponentielle de paramètre $-\ln(1-p)$, et on arrondit à une valeur entière.

Exercice 5 :

$$I = E(\mathbb{I}_{(X>0)}e^{\beta x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\Rightarrow \hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{(X_i>0)}e^{\beta X_i} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} I \quad \text{(Monte-Carlo standard)}$$

(1) Si on cherche à calculer $E(e^{\beta X})$ avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Nous savons que

$$\begin{aligned} E(e^{\beta X}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\beta x}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right)dx \\ &= e^{\frac{\beta^2}{2}} \end{aligned}$$

Si nous tirons $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. de même loi que X, nous aurons

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\beta X_i} \approx E(e^{\beta X}) + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Y$$

avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\sigma^2 = Var(e^{\beta X})$ (d'après le théorème de la limite-centrale).
Un calcul similaire à celui que nous venons de faire nous donne :

$$\sigma^2 = e^{2\beta^2} - e^{\beta^2}$$

En ce qui concerne l'erreur relative

$$\frac{1}{E(e^{\beta X})}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\beta X_i} - E(e^{\beta X})\right| \approx \frac{\sigma}{E(e^{\beta X})\sqrt{n}} E(|Y|) = \frac{\sigma}{E(e^{\beta X})\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Nous avons $\frac{\sigma}{E(e^{\beta X})} = \sqrt{e^{\beta^2} - 1}$. Par exemple, si $\beta = 5$, si nous voulons une erreur relative de l'ordre de 1, il faut prendre n tel que

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{e^{\beta^2} - 1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \geqslant 1,96$$

c'est-à-dire n de l'ordre de 4×10^{11}, ce qui n'est pas réalisable dans la pratique. C'est pourquoi il est important de réduire la variance.
(2) **Méthode d'échantillonnage préférentiel :**
Posons $h(x) = \mathbb{I}_{\{x>0\}} e^{\beta x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
Nous remarquons que

$$h(x)f(x) = \frac{\mathbb{I}_{\{X>0\}}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right)$$

Nous utilisons les mêmes notations que dans le cours et prenons

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right)$$

Nous avons

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(y)dy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2\right)$$

(c'est la densité de $\mathcal{N}(\beta, 1)$, suivant laquelle nous savons simuler).
(3) **Méthode de variable de contrôle :**
Nous avons

$$I = E(f(X))$$

avec $f(x) = \mathbb{I}_{\{x>0\}} e^{\beta x}$

$$= E(f(X) - h(X)) + E(h(X))$$

avec $h(x) = e^{\beta x}$ et $E(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left((-\frac{x^2}{2} + \beta x)\right)}{\sqrt{2\pi}} dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(x-\beta)^2 + \frac{\beta^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$= \exp\left(\frac{\beta^2}{2}\right)$$

(4) **Technique de variable antithétique :**
Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $-X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Donc

$$E(h(X)) = E(h(-X)) = E\left(\frac{h(X)+h(-X)}{2}\right)$$

On en déduit une nouvelle méthode de Monte-Carlo pour approcher l'espérance.