Université Abdelmalek Essaâdi | **Année universitaire : 2020/2021**
Faculté des Sciences de Tétouan | **Masters MAF**
Département de Mathématiques | **Semestre 2**

Rattrapage de "Méthodes de Monte-Carlo"

Durée: 1h30

Exercice 1 : (6 points)
Soit I l'intégrale suivante : $I = \int_0^\pi e^x \sin x dx$.

1. Écrire I comme une espérance mathématique d'une fonction de variable aléatoire dont on précisera la densité de probabilité.
2. Donner $\hat{I}$ l'approximation de Monte-Carlo de I ainsi que sa variance approximée $\hat{\sigma}^2$.
3. Donner l'algorithme de calcul de $\hat{I}$ et de sa variance approximée $\hat{\sigma}^2$.
4. Donner une autre approximation Monte-Carlo plus précise de I basée sur la méthode de la variable antithétique.

Exercice 2 : (6 points)
On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la densité conjointe est définie par : $f(x, y) = \lambda x y^{x-1} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{\{x>0\}} \mathbb{I}_{\{0 \leqslant y \leqslant 1\}}$.

1. Trouver la loi marginale de X.
2. Trouver la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.
3. Donner avec précision les différents étapes à suivre pour simuler le couple (X, Y).

Exercice 3 : (3 points)
On souhaite simuler des variables aléatoires réelles de densité $\pi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+\sin(\alpha x))$, où $\alpha > 0$ (on pourra prendre $\alpha = 2$). On considère aussi une loi de proposition $q(x, .) \sim \mathcal{N}(x, 1)$.
Écrire l'algorithme de Metropolis-Hastings permettant de simuler suivant la densité π_α.

Exercice 4 : (5 points)
Soit X une loi géométrique de paramètre p :

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}^*$$

1. Rappeler la méthode classique de simulation de X à l'aide de tirages à pile ou face.
2. Proposer une autre méthode de simulation de cette loi utilisant la fonction de répartition.
3. Soit $\lambda > 0$ et T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Soit $X = \lceil T \rceil$ la partie entière par excès de T. Quelles valeurs peut prendre X ? Avec quelles probabilités ? En déduire un nouveau moyen de générer une loi géoétrique $\mathcal{G}(p)$.
4. Que donne la méthode d'inversion ?
