Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2020/2021
Masters MAF
Semestre 2

Contrôle de "Méthodes de Monte-Carlo"

Durée: 1h30

Exercice 1 : (4 points)
Estimer la valeur de $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ par la méthode de Monte-Carlo et appliquer une amélioration de cette valeur à l'aide de la méthode de l'échantillonnage préférentiel.

Exercice 2 : (3 points)
On suppose que la fonction de densité conjointe de deux variables aléatoires X et Y, est $f(x,y) \propto C_n^x y^{x+\alpha-1}(1-y)^{n-x+\beta-1}$ pour $x = 0, 1, \cdots, n; 0 \leqslant y \leqslant 1$.
Donner l'échantillonnage de Gibbs associé.

Exercice 3 : (6 points)
I.- Soit X une variable aléatoire dont la loi est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire telle que X et $-X$ ont la même loi. Soit S une variable aléatoire indépendante de $|X|$, telle que $P(S = 1) = P(S = -1) = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que $Z = |X|S$ a même loi que X.
2. En déduire un algorithme de simulation d'une variable aléatoire X de densité $g(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$ pour une constante $\lambda > 0$.

II.- On veut simuler, par une méthode de rejet, une loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$ de densité notée f par rapport à une loi de Laplace de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire de densité $g(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$.

1. Déterminer le meilleur couple (λ, c) qui permet de minimiser la probabilité de rejet (c'est-à-dire, tel que $f \leqslant cg$).
2. Donner l'algorithme de rejet correspondant.

Exercice 4 : (7 points)
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois Normales centrées réduites.

1. Soit (R, Θ) les coordonnées polaires du point (X, Y). Montrer que R et Θ sont indépendantes et calculer leur loi.
2. Montrer que si U_1 et U_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, alors le couple (X_1, X_2), avec $X_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2)$ et $X_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2)$, est un couple de variables aléatoires Normales centrées réduites indépendantes.
3. On pose $V_1 = 2U_1 - 1$, $V_2 = 2U_2 - 1$ et $R^2 = V_1^2 + V_2^2$. On accepte ces tirages sous réserve que $R < 1$ et l'on fait de nouveau tirage si $R \leqslant 1$. Quelle est la loi du couple (V_1, V_2) dans ces conditions (après rejet) ? En déduire que si l'on pose :
   $X_1 = V_1\sqrt{\frac{-2\ln(R^2)}{R^2}}$ et $X_2 = V_2\sqrt{\frac{-2\ln(R^2)}{R^2}}$
   X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires Normales centrées réduites indépendantes.
4. Écrire les deux algorithmes suggérés.