Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2020/2021
S.M.A.
Semestre 6

Corrigés du contrôle de Probabilités 2

Durée: 1h

Exercice 1 : (10 points)

1. On cherche $P(X = k)$. L'ensemble fondamental Ω est constitué de tous les sous-ensembles de n boules que l'on peut tirer de l'urne $\Omega = \mathfrak{P}(E)$. C'est l'ensemble de parties à n éléments de l'ensemble E des boules. On a $Card\Omega = C_{a+b}^n$. Le nombre de façons de tirer k boules parmi les a blanches est C_a^k et pour chacune de ces façons il y a C_b^{n-k} manières de tirer $n-k$ boules parmi les rouges. Le nombre de cas favorables étant $C_a^k C_b^{n-k}$, on obtient, donc, $P(X = k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$. Comme $\sum_k C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$, on a bien $\sum_k P(X = k) = 1$.
2. Soit X une v.a. qui suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, a, b)$de paramètres n, a et b, alors $P(X = k) = \dfrac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$ avec $\sup(0, n - b) \leqslant k \leqslant \inf(a, n)$

   Montrons que $E(X) = \dfrac{na}{a+b}$.

   On a : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{1}{C_{a+b}^n}\sum_{k=0}^{n} kC_a^k C_b^{n-k}$

   $$= \frac{1}{C_{a+b}^n} a \sum_{k=1}^{n} kC_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k}$$

   $$= \frac{a}{C_{a+b}^{n-1}} C_{a+b-1}^{n-1} = \frac{an}{a+b}$$

   On peut retrouver ce même résultat en considérant X comme une somme de n variables de Bernoulli $X_i, i = 1, 2, \cdots, n$, non indépendantes. Ces variables X_i ont même espérance mathématique $\dfrac{a}{a+b}$.

   En effet, $E(X_1) = 0 \times P(X_1 = 0) + 1 \times P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1) = \dfrac{a}{a+b}$

   $E(X_2) = 0 \times P(X_2 = 0) + 1 \times P(X_2 = 1)$.

   Comme X_2 et X_1 ne sont pas indépendantes,

   $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1/X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1/X_1 = 0)P(X_1 = 0)$

   $= \dfrac{a-1}{a+b-1}\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{a}{a+b-1}\dfrac{b}{a+b}$

   $= \dfrac{a}{a+b}\left(\dfrac{a-1+b}{a+b-1}\right) = \dfrac{a}{a+b}$;

   d'où $E(X_2) = \dfrac{a}{a+b}$.

   De même, on trouve $E(X_3) = \cdots = E(X_n) = \dfrac{a}{a+b}$

et $E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n\dfrac{a}{a+b}$

$$Var(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

En effet, $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$

$$E(X^2) = \frac{1}{C_{a+b}^n}\left[\sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_a^k C_b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k C_a^k C_b^{n-k}\right]$$

$$= \frac{1}{C_{a+b}^n}\left[a(a-1)\sum_{k=2}^{n} C_{a-1}^{k-2} C_b^{n-k} + \frac{an}{a+b}\right]$$

$$= \frac{1}{C_{a+b}^n}\left[a(a-1)\sum_{k=2}^{n-2} C_{a-1}^{k} C_b^{n-k} + \frac{an}{a+b}\right]$$

$$= \frac{1}{C_{a+b}^n}\left[a(a-1)C_{a+b-2}^{n-2} + \frac{an}{a+b}\right]$$

$$= \frac{a(a-1)b(n-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{an}{a+b}.$$

Comme $E(X)^2 = \left(\dfrac{an}{a+b}\right)^2$, on en déduit $Var(X) = \dfrac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$.

De la même manière que pour $E(X)$, on peut retrouver ce même résultat en considérant X comme une somme de n variables de Bernoulli $X_i, i = 1, 2, \cdots, n$, non indépendantes.

En effet, $Var(X) = Var\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i>j} Cov(X_i, X_j)$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i\neq j} Cov(X_i, X_j)$$

On a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n\frac{a}{a+b}\frac{b}{a+b} = n\frac{ab}{(a+b)^2}$

et $Cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2 = P(X_iX_j = 1) - \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2$

avec $P(X_iX_j = 1) = P(X_j = 1/X_i = 1)P(X_i = 1) = P(X_j = 1/X_i = 1)\dfrac{a}{a+b}$.

Comme $P(X_j = 1/X_i = 1)$ ne dépend pas de i et j, $P(X_j = 1/X_i = 1) = \dfrac{a-1}{a+b-1}$;

d'où : $Cov(X_i, X_j) = \dfrac{a}{a+b}\dfrac{a-1}{a+b-1} - \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2$

et $Var(X) = n\dfrac{ab}{(a+b)^2} + \left(\dfrac{a}{a+b}\dfrac{a-1}{a+b-1} - \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2\right) = \dfrac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$.

3. Si $N = a + b \to \infty$, $\mathcal{H}(n, a, b) \to \mathcal{B}(n, \frac{a}{N})$.
On suppose que les proportions $\frac{a}{N}$ et $\frac{b}{N}$ restent fixes. On a

$$P(X = k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_N^n} = \frac{\frac{a!}{k!(a-k)!}\frac{b!}{(n-k)!(b-n+k)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}}$$

$$= \frac{\frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)b(b-1)(b-2)\cdots(b-n+k+1)}{k!(n-k)!}}{\frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)}{n!}}$$

$$= \frac{n!a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)b(b-1)(b-2)\cdots(b-n+k+1)}{k!(n-k)!N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)}$$

Comme $N \to \infty$, n et k sont fixés, a et $b \to \infty$ car $\frac{a}{N}$ et $\frac{b}{N}$ restent fixés). On obtient :

$$a(a-1)\cdots(a-k+1) = a^k(1-\frac{1}{a})\cdots(a-\frac{k+1}{a}) \sim a^k$$

$$b(b-1)\cdots(b-n+k+1) = b^{n-k}(1-\frac{1}{b})\cdots(1-\frac{n-k-1}{b}) \sim b^{n-k}$$

$$N(N-1)\cdots(N-n+1) = N^n(1-\frac{1}{N})\cdots(1-\frac{n-1}{N}) \sim N^n$$

Si N est grand

$$\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_N^n} \sim \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{a^k b^{n-k}}{N^n}$$

et

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{a^k b^{n-k}}{N^k N^{n-k}} = C_n^k \left(\frac{a}{N}\right)^k \left(\frac{b}{N}\right)^{n-k}$$

$$= C_n^k \left(\frac{a}{N}\right)^k \left(1-\frac{a}{N}\right)^{n-k}$$

En pratique, cette approximation est vraie dès que $\frac{n}{N} < 0,1$.

4. Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$. α et β étant deux nombres tels que $\alpha \leqslant \beta$. On veut calculer $P(X = \alpha / X + Y = \beta)$.

   D'abord, on doit savoir que si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$, avec X et Y deux v.a. indépendantes, alors, $X + Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.

   <u>En effet :</u>

   Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$P(X+Y=\beta) = \sum_A P(X=a).P(X=b)$$

   où $A = \{(a,b)/0 \leqslant a \leqslant n, 0 \leqslant b \leqslant m, a+b=\beta\}$.

$$P(X+Y=\beta) = \sum_A C_n^a p^a (1-p)^{n-a}.C_m^b p^b (1-p)^{m-b}$$

$$P(X+Y=\beta) = \sum_A C_n^a.C_m^b p^{a+b}(1-p)^{n+m-(a+b)}$$

   Or $\sum_A C_n^a.C_m^b = \sum_{\beta=a+b=0}^{n+m} C_n^a.C_m^b = \sum_{a=0}^{n} C_n^a C_m^{\beta-a} = C_{n+m}^{\beta}$

   <u>En effet :</u>

   Considérons $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n.(1+x)^m$.

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k$$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i$$

$$(1+x)^m = \sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j$$

On a donc $\sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i . \sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j$
En identifiant les coefficients de x^k, on peut écrire :

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_m^{j=k-i}$$

D'où, en prenant $i = a$, $j = b$ et $k = \beta$, $C_{n+m}^{\beta} = \sum_{a=0}^{n} C_n^a C_m^{\beta-a}$ On en déduit que :

$$P(X+Y=\beta) = C_{n+m}^{\beta} p^{\beta} (1-p)^{n+m-\beta}$$

i.e. $X + Y \sim \mathcal{B}(n+m, p)$.
Calculons, maintenant, $P(X = \alpha / X + Y = \beta)$.
X et Y étant indépendantes, on peut écrire :

$$P(X = \alpha / X + Y = \beta) = \frac{P(X = \alpha, X + Y = \beta)}{P(X + Y = \beta)}$$

$$= \frac{P(X = \alpha / Y = \beta - \alpha)}{P(X + Y = \beta)}$$

$$= \frac{C_n^{\alpha} p^{\alpha} (1-p)^{n-\alpha} . C_m^{\beta-\alpha} p^{\beta-\alpha} (1-p)^{m-\beta+\alpha}}{C_{n+m}^{\beta} p^{\beta} (1-p)^{n+m-\beta}}$$

$$= \frac{C_n^{\alpha} C_m^{\beta-\alpha} p^{\beta} (1-p)^{n+m-\beta}}{C_{n+m}^{\beta} p^{\beta} (1-p)^{n+m-\beta}}$$

Soit $P(X = \alpha / X + Y = \beta) = \frac{C_n^{\alpha} C_m^{\beta-\alpha}}{C_{n+m}^{\beta}}$
On voit, donc, que la loi de X conditionnée par $X + Y = \beta$ est hypergéométrique de paramètres $n + m$, n et β (que l'on note par $\mathcal{H}(n+m, n, \beta)$).

Exercice 2 : (10 points)

1. $\varphi_X(t) = E(e^{itX})$, alors $\varphi_{-X}(t) = E(e^{-itX}) = E(e^{i(-t)X}) = \varphi_X(-t)$
   $\varphi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX}.e^{itY}) = E(e^{itX}).E(e^{itY}) = \varphi_X(t).\varphi_Y(t)$ (car X et Y sont indépendantes)
   Donc, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t).\varphi_X(t) = (\varphi_X(t))^2$ (car X et Y sont de même loi).
   $\varphi_{X-Y}(t) = E(e^{it(X-Y)}) = E(e^{itX}.e^{-itY}) = E(e^{itX}).E(e^{-itY}) = \varphi_X(t).\varphi_Y(-t)$ (car X et Y sont indépendantes)
   Donc, $\varphi_{X-Y}(t) = \varphi_X(t).\varphi_X(-t)$ (car X et Y sont de même loi).
2. On remarque que $\overline{\varphi_X(t)} = \overline{E[e^{itX}]} = E[e^{-itX}] = \varphi_{-X}(t)$.
   Donc $\varphi_X(t)$ est réelle si, et seulement si, $\varphi_{-X}(t) = \varphi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si la loi de X est symétrique.

3. Soit X qui suit une loi exponentielle symétrique de paramètre λ (i.e. de densité $f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$) ; alors, de même,

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^{+\infty} e^{itx}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{itx}\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\lambda - it} + \frac{1}{\lambda + it}\right) = \frac{\lambda^2}{t^2+\lambda^2}$$

4. Soit X qui suit une loi de Cauchy de paramètre λ, c'est-à-dire si X a pour densité $\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+x^2)}$. Avec la question précèdente, et en utilisant la formule d'inversion (de réciprocité) de Fourier (on a $\varphi_Y(t) = \hat{f}(t)$), on obtient que :

$$f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{ity}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}\frac{\lambda^2}{t^2+\lambda^2}dt = \frac{\lambda}{2}E[e^{-iyX}]$$

Comme X est symétrique, on a (voir exercice 6) $E[e^{iyX}] = E[e^{-iyX}] = f(y)$.
On a donc, si $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$, $\phi_X(y) = e^{-\lambda|y|}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

5. $\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E(e^{itZY}) = \frac{1}{2}E(e^{itY}) + \frac{1}{2}E(e^{-itY}) = \frac{1}{2}\varphi_Y(t) + \frac{1}{2}\varphi_Y(-t)$
$\varphi_{-X}(t) = E(e^{-itX}) = E(e^{-itZY}) = \frac{1}{2}E(e^{-itY}) + \frac{1}{2}E(e^{itY}) = \frac{1}{2}\varphi_Y(-t) + \frac{1}{2}\varphi_Y(t) = \varphi_X(t)$
Donc X est symétrique.
$\varphi_X(t) = \frac{1}{2}(\varphi_Y(t) + \varphi_Y(-t))$
Supposons que X est densité g, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}g(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ity}f(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ity}f(y)dy\right)$
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}g(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(-x)dx\right)$
$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}g(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}(f(x) + f(-x))dx\right)$
Donc $g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ (Par formule de réciprocité de Fourier).