Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
S.M.A.
Semestre 6

Rattrapage de Probabilités 2

(Durée: 1h)

Faites seulement deux exercices, aux choix, parmi les trois exercices suivants :

Exercice 1 : (10 points)
Soient θ un réel strictement positif et X la variable aléatoire de densité f définie par :

$$\forall x \geqslant 1, \;\; f(x) = \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1+\theta}{\theta}}, \;\; \text{et } 0 \text{ sinon.}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F associée.
2. Calculer $P(0 < X \leqslant 2)$.
3. Pour quelles valeurs de θ, X admet-elle une espérance mathématique ? Calculer-la quand elle existe.

Exercice 2 : (10 points)
Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f. Déterminer la densité de probabilité $h(y)$ de la variable aléatoire $Y = \sin X$ dans les deux cas suivants :

1. si f est donnée par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } \;\; x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si } \;\; x \notin [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$
2. si f est donnée par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2} & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Exercice 3 : (10 points)

1. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer sa fonction génératrice des moments $M_Z(t)$.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma > 0$, $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Déterminer sa fonction génératrice des moments $M_X(t)$ et retrouver, à partir de sa fonction génératrice des moments, son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $Var(X)$.
3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent, respectivement les lois normales $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$. Montrer, en utilisant la fonction génératrice des moments, que la variable aléatoire somme $Y = X_1 + X_2$ suit la loi normale de moyenne $\mu_1 + \mu_2$ et d'écart-type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Bonne Chance !