Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2018/2019
S.M.A. Semestre 6
Rattrapage de Probabilités 2

Corrigés

Exercice 1 :

1. Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1-p)$, en effet :

$$P(Y=i) = P(X=n-i) = C_n^{n-i} p^{n-i}(1-p)^i$$

Comme $C_n^{n-i} = \frac{n!}{(n-i)!i!} = C_n^i$, on obtient,

$$P(Y=i) = C_n^i (1-p)^i p^{n-i}$$

2.

$$\text{On a } P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$
$$\text{et } P(X=k-1) = C_n^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}$$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} &= \frac{C_n^k p^k (1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}}\\ &= \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!}\frac{p}{(1-p)}\\ &= \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}\end{aligned}$$

D'où la relation. Puis, on a :

$$\begin{aligned}P(X=k) &= P(X=k-1)\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}\\ &= P(X=k-2)\frac{(n-k+2)(n-k+1)p^2}{(k-1)k(1-p)^2}\\ &= \cdots = P(X=0)\frac{n\cdots(n-k+2)(n-k+1)p^k}{1\times\cdots\times(k-1)k(1-p)^k}\\ &= (1-p)^n \frac{n!p^k}{k!(n-k)!(1-p)^k}\\ &= C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

$P(X=0) = (1-p)^n$ (En répétant n fois l'expérience de Bernoulli, on a eu que des échecs.)

3. L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Comme $\forall k = 1, 2, \cdots, n$, on a : $kC_n^k = \frac{kn!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1}$, $E(X)$ s'écrit sous la forme :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} =$$

$$= np\left(p + (1-p)\right)^{n-1} = np$$

et la variance de X est $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. On a :

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[k(k-1) + k\right] C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

En remarquant que $k(k-1)C_n^k = n(k-1)C_{n-1}^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$, on a :

$$E(X^2) = n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} + np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1)p^2\left(p + (1-p)\right)^{n-2} + np\left(p + (1-p)\right)^{n-1} = n(n-1)p^2 + np$$

On a donc $Var(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$

4. En considérant que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec les $X_i; i = 1, 2, \cdots, n$ sont des variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p, l'espérance mathématique s'écrit : $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ (car l'espérance est linéaire), d'où, comme $E(X_i) = p$ pour tout $i = 1, \cdots, n$, on a : $E(X) = np$.

   De même pour la variance : $Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$ (car les X_i sont indépendantes), d'où $Var(X) = np(1-p)$ (puisque $Var(X_i) = p(1-p)$).

5. La fonction caractéristique de la v.a. X est :

$$\varphi(u) = E(e^{iuX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} P(X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{iu})^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \left(pe^{iu} + (1-p)\right)^n$$

   Pour recalculer $E(X)$ et $Var(X)$, on calcul la dérivée de la fonction caractéristique $\varphi'(u) = n\left(pe^{iu} + (1-p)\right)^{n-1} ipe^{iu}$ d'où $E(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = np$

   Et puis la dérivée seconde $\varphi''(u) = -npe^{iu}\left(pe^{iu} + (1-p)\right)^{n-2}\left(npe^{-iu} + (1-p)\right)$;

et $E(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = -\left[-n(n-1)p^2 - np\right] = n(n-1)p^2 + np$
La variance $Var(X)$ est donc

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)$$

6. On a $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ indépendantes
   (a) On a : $P(X_1 + X_2 = k) = \sum_A P(X_1 = i, X_2 = j)$
   où $A = \{(i,j)/0 \leqslant i \leqslant n_1; 0 \leqslant j \leqslant n_2, i + j = k\}$
   $P(X_1 + X_2 = k) = \sum_A P(X_1 = i)P(X_2 = j)$, (car X_1 et X_2 sont indépendantes)
   $= \sum_A C_{n_1}^i p^i (1-p)^{n_1-i} C_{n_2}^j p^j (1-p)^{n_2-j} = \sum_A C_{n_1}^i C_{n_2}^j p^{i+j}(1-p)^{n_1+n_2-i-j}$
   Or $\sum_A C_{n_1}^i C_{n_2}^j = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} C_{n_1}^i C_{n_2}^j = C_{n_1+n_2}^k$
   donc $P(X_1 + X_2 = k) = C_{n_1+n_2}^k p^k (1-p)^{n_1+n_2-k}$
   d'où $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.
   Autre méthode :

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = E\left(e^{it(X_1+X_2)}\right)$$
$$= E\left(e^{itX_1}e^{itX_2}\right)$$

   Comme X_1 et X_2 sont indépendantes. Alors, e^{itX_1} et e^{itX_2} le sont aussi.

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = E(e^{itX_1}).E(e^{itX_2})$$

$$= (pe^{iu} + (1-p))^{n_1}(pe^{iu} + (1-p))^{n_2}$$
$$= (pe^{iu} + (1-p))^{n_1+n_2}$$

   C'est la fonction caractéristique d'une loi binomiale de paramètres p et $n_1 + n_2$.
   Donc $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.
   (b) α et β deux entiers tels que $\alpha \leqslant \beta$. On calcul

$$P(X_1 = \alpha / X_1 + X_2 = \beta) = \frac{P(X_1 = \alpha, X_1 + X_2 = \beta)}{P(X_1 + X_2 = \beta)}$$

$$= \frac{P(X_1 = \alpha, X_2 = \beta - \alpha)}{P(X_1 + X_2 = \beta)} = \frac{P(X_1 = \alpha).P(X_2 = \beta - \alpha)}{P(X_1 + X_2 = \beta)}$$

(car X_1 et X_2 sont indépendantes)

$$= \frac{C_{n_1}^{\alpha} p^{\alpha}(1-p)^{n_1-\alpha}.C_{n_2}^{\beta-\alpha} p^{\beta-\alpha}(1-p)^{n_2-\beta+\alpha}}{C_{n_1+n_2}^{\beta} p^{\beta}(1-p)^{n_1+n_2-\beta}}$$

$$= \frac{C_{n_1}^{\alpha} C_{n_2}^{\beta-\alpha} p^{\beta}(1-p)^{n_1+n_2-\beta}}{C_{n_1+n_2}^{\beta} p^{\beta}(1-p)^{n_1+n_2-\beta}}$$

   donc $P(X_1 = \alpha / X_1 + X_2 = \beta) = \frac{C_{n_1}^{\alpha} C_{n_2}^{\beta-\alpha}}{C_{n_1+n_2}^{\beta}}$
   On voit, donc, que la loi de X_1 conditionnée par $X_1 + X_2 = \beta$ est une hypergéométrique de paramètres $n_1 + n_2, n_1$ et β (que l'on note $X_1 + X_2 \sim \mathcal{H}(n_1 + n_2, n_1, \beta)$).

Exercice 2 :

1. On a $P(1-U \leqslant u) = P(U \geqslant 1-u) = 1 - F_U(1-u)$. Comme $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$, $F_U(u) = u$ pour $u \in]0,1[$, $F_U(u) = 0$ pour $u \leqslant 0$ et $F_U(u) = 1$ pour $u \geqslant 1$, où F_U est la fonction de répartition de U. On a donc $F_U(1-u) = 1-u$ et $P(1-U \leqslant u) = u = P(U \leqslant u)$, de sorte que U et $1-U$ ont même fonction de répartition, donc elles suivent la même loi.
2. Pour $v \geqslant 0$, on a $P(V \leqslant v) = P(-\ln U \leqslant u) = P(U \geqslant e^{-v}) = 1 - e^{-v}$.
   Pour $v < 0$, $P(V \leqslant v) = 0$.
   On dit que V suit la loi exponentielle de paramètre 1 et on écrit $V \sim \mathcal{E}xp(1)$.
   Comme U et $1-U$ ont même loi, W suit aussi la loi loi exponentielle de paramètre 1.
3. La variable aléatoire $R = \sqrt{-\ln(U)}$ a pour domaine de variation $[0, +\infty[$. Pour $r < 0$, on a $F_R(r) = P(R \leqslant r) = 0$. Pour $r \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_R(r) &= P(R \leqslant r) \\ &= P(\sqrt{-\ln(U)} \leqslant r) \\ &= P(-\ln(U) \leqslant r^2) \\ &= P(\ln(U) \geqslant -r^2) \\ &= P(U \geqslant e^{-r^2}) \\ &= 1 - e^{-r^2} \end{aligned}$$

   On a donc :

$$F_R(r) = \begin{cases} 1 - e^{-r^2} & \text{si } r \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Il suffit alors de dériver F_R pour vérifier que $R \sim \mathcal{R}(\sigma)$ avec $\sigma = \sqrt{2}/2$.
4. (a) Par la formule de changement de variable, on a :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_{(R,\Theta)}(r,\theta) \left| \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} \right|$$

$$= f_{(R,\Theta)}(\sqrt{x^2+y^2}, h(x,y)) \left| \frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} \right|$$

$$\frac{\partial(r,\theta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   et

$$h(x,y) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ \arctan(y/x) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Puisque R et Θ sont indépendantes, on peut écrire :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} f_R(\sqrt{x^2+y^2}) f_\Theta(h(x,y)),$$

   pour $(x,y) \neq 0$. Comme $\Theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi[)$ et que $h(x,y) \in]0,2\pi[$, $f_\Theta(h(x,y)) = \frac{1}{2\pi}$. De plus, comme $R \sim \mathcal{R}(\sqrt{2}/2)$,

$$f_R(\sqrt{x^2+y^2}) = 2\sqrt{x^2+y^2}e^{-(x^2+y^2)} = 2re^{-r^2},$$

   D'où :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2+y^2} e^{-(x^2+y^2)} \frac{1}{2\pi} = \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{\pi}$$

(b) La loi marginale de X est donnée par :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dy$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{e^{-x^2}}{\pi}$$

De même, $f_Y(y) = \frac{1}{\pi} e^{-y^2}$.
On a donc $X \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ et $Y \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, puisque la densité d'une variable aléatoire $Z \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ est $\forall z \in \mathbb{R}, f_Z(z) = \frac{1}{\pi} e^{-z^2}$.
On remarque aussi que $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x).f_Y(y)$.
D'où, les v.a. X et Y sont indépendantes.
♠ Justification de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$:
Soit $Z \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, $\forall z \in \mathbb{R}, f_Z(z) = \frac{1}{\pi} e^{-z^2}$,
et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z) dz = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$.