Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2021/2022
S.M.A. S6
Probabilités 2

Contrôle de rattrapage

Durée: 1heure 30 min

Exercice 1 : (8 points)
On se fixe un nombre entier n strictement positif et deux paramètres réels positifs p_x et p_y tels que $p_x + p_y \leqslant 1$.
La loi trinomiale (n, p_x, p_y) est la loi du couple aléatoire (X, Y) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que $(X,Y)(\Omega) \in \mathbb{N}^2$ et donnée pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i + j \leqslant n$, par :

$$P(X = i, Y = j) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_x^i p_y^j \left(1 - p_x - p_y\right)^{n-i-j}$$

et $P(X = i, Y = j) = 0$, sinon.

1. Montrer que l'on définit ainsi la loi d'un couple aléatoire.
2. Déterminer la loi marginale de X. En déduire celle de Y.
3. Calculer la loi de $X + Y$.
4. Calculer la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = k\}$, pour un entier $k \in \{0, \cdots, n\}$.

Exercice 2 : (12 points)
Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère une variable aléatoire continue X qui suit une loi gamma de paramètres α et β $(\alpha, \beta > 0)$, notée $\Gamma(\alpha, \beta)$ et de densité de probabilité donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{-\alpha - 1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha - 1} dt$ est la fonction Eulérienne de second espèce.

1. Vérifier que c'est bien une loi de probabilité.
2. Montrer que :
   (a) pour tout réel strictement positif α, on a : $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha)$.
   (b) $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
   (c) pour tout entier naturel strictement positif n, on a : $\Gamma(n + 1) = n!$.
3. Calculer son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $Var(X)$.
4. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement des lois gamma $\Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $\Gamma(\alpha_2, \beta)$ $(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta > 0$, avec le même $\beta)$. Montrer, alors, que la variable aléatoire $Z = X_1 + X_2$ suit une loi gamma $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.
5. Soit Z une variable aléatoire normale centrée réduite $N(0, 1)$. Montrer que la variable aléatoire Z^2 suit une loi gamma $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Bonne chance !

Corrigés du rattrapage 2021/2022
Probabilités 2 – S.M.A – S_6

Exercice 1 :

1°) soit $0 \leq i \leq n$; $i+j \leq n \iff j \leq n-i$

$$\sum_i \sum_j P(X=i, Y=j) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_x^i p_y^j (1-p_x-p_y)^{n-i-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} p_x^i p_y^j (1-p_x-p_y)^{n-i-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} C_n^i C_{n-i}^j p_x^i p_y^j (1-p_x-p_y)^{n-i-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i p_x^i \sum_{j=0}^{n-i} C_{n-i}^j p_y^j (1-p_x-p_y)^{n-i-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i p_x^i (\cancel{p_y} + 1 - p_x - \cancel{p_y})^{n-i}$$

$$= (1-p_x+p_x)^n = 1^n = 1.$$

Donc on a bien la loi d'un couple aléatoire.

2°) Loi marginale de X :

soit $0 \leq i \leq n$

$$P(X=i) = \sum_{j=0}^{n} P(X=i, Y=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-i} P(X=i, Y=j) + \sum_{j=n-i+1}^{n} P(X=i, Y=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_x^i p_y^j (1-p_x-p_y)^{n-i-j} + 0$$

$$= \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\, p_x^i \sum_{j=0}^{n-i} \frac{(n-i)!}{j!\,(n-i-j)!}\, p_y^j \left(1-p_x-p_y\right)^{n-i-j}$$

$$= C_n^i\, p_x^i \left(1-p_x\right)^{n-i}$$

La v.a. X suit donc une loi binomiale $B(n, p_x)$.
Un calcul analogue montre que Y suit une loi binomiale $B(n, p_y)$.

3°) Loi de $X+Y$:

$X+Y$ est une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$,
et on a, pour tout entier k :

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{n} P(X=i,\ Y=k-i)$$

Pour tout $k>n$, chacun des termes de cette somme est nul,
donc $P(X+Y=k)=0$.
Fixons maintenant un entier $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i,\ Y=k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{i!\,(k-i)!\,(n-k)!}\, p_x^i\, p_y^{k-i} \left(1-p_x-p_y\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \left(1-p_x-p_y\right)^{n-k} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!\,(k-i)!}\, p_x^i\, p_y^{k-i}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(1-p_x-p_y\right)^{n-k} \left(p_x+p_y\right)^{k}$$

La v.a. $X+Y$ suit donc une loi binomiale $B(n, p_x+p_y)$.

4°) Loi conditionnelle de X sachant $\{Y=k\}$, pour un entier $k \in \{0, \dots, n\}$:

Remarquons tout d'abord que si $i<0$ ou $i>n-k$,

$$P(X=i / Y=k) = 0 .$$

Fixons maintenant un entier $i \in \{0, \dots, n-k\}$, on a :

$$P(X=i/Y=k) = \frac{P(X=i, Y=k)}{P(Y=k)}$$

$$= \frac{n!\, p_x^i\, p_y^k\, (1-p_x-p_y)^{n-i-k}}{i!\,k!\,(n-i-k)!} \cdot \frac{k!\,(n-k)!}{n!\, p_y^k\, (1-p_y)^{n-k}}$$

$$= \frac{(n-k)!}{i!\,(n-k-i)!} \left(\frac{p_x}{1-p_y}\right)^i \left(\frac{1-p_x-p_y}{1-p_y}\right)^{n-k-i}$$

La loi conditionnelle de X sachant $\{Y=k\}$ est donc binomiale

$$\mathcal{B}\left(n-k, \frac{p_x}{1-p_y}\right).$$

Exercice 2 :

1°) On a : $f \geq 0$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}\, dx$$

Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}\, dx$, par chgt de variable : $\beta x = t$

alors $x = \frac{t}{\beta}$ et $dx = \frac{dt}{\beta}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha-1} \frac{dt}{\beta} = \frac{1}{\beta^\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} = 1$.

D'où f est bien une densité de probabilité.

2°) (a) $\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\alpha \, dt$, par parties, en posant

$$\left.\begin{array}{l} u' = e^{-t} \\ v = t^\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u = -e^{-t} \\ v' = \alpha t^{\alpha-1} \end{array}\right.$$

On a : $\Gamma(\alpha+1) = \underbrace{\left[-e^{-t} t^\alpha\right]_0^{+\infty}}_{0} + \alpha \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \, dt = \alpha\, \Gamma(\alpha)$.

(b) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} \, dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} \, dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \, dt$, par chgt de variable, en posant $t = x^2$; $dt = 2x\, dx$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x} 2x \, dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

soit $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$, alors $x^2 = \frac{t^2}{2}$ et $dx = \frac{dt}{\sqrt{2}}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2} \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2\pi} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = 1 \\ \text{densité de } N(0,1) \end{array}\right)$$

donc $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

(c) on a pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha)$

pour $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+^*$;

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\, \Gamma(n) \\ &= n(n-1)\, \Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\, \Gamma(n-2) \\ &= \cdots \\ &= n!\, \Gamma(1) \\ &= n! \end{aligned}$$

3°) Espérance $E(X)$ et variance $Var(X)$, par la méthode directe :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-\beta x} x^\alpha\, dx$$

Calcul de $\int_0^{\infty} e^{-\beta x} x^\alpha\, dx$ par chgt de variable, en posant

$\beta x = t$, alors $x = \frac{t}{\beta}$ et $dx = \frac{dt}{\beta}$

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} x^\alpha\, dx = \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha \frac{dt}{\beta} = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^\alpha\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}}$$

$$E(X) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

* $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\beta x} x^{\alpha-1} dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} x^{\alpha+1}\, dx$$

Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} x^{\alpha+1} dx$ par chgt de variable, en posant

$\beta x = t$, alors $x = \frac{t}{\beta}$ et $dx = \frac{dt}{\beta}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} x^{\alpha+1}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{\beta}\right)^{\alpha+1} \frac{dt}{\beta} = \frac{1}{\beta^{\alpha+2}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha+1} dt$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha+2}} \Gamma(\alpha+2)$$

$$E(X^2) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\beta^{\alpha+2}} \cdot \Gamma(\alpha+2) = \frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{\beta^2\ \Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta^2\ \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2+\alpha-\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

4°) Soit $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$ de densité

$$f_1(x) = \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} e^{-\beta x} x^{\alpha_1 - 1} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$$

$X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$ de densité $f_2(x) = \frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta x} x^{\alpha_2 - 1} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$

X_1 et X_2 sont indép. On cherche la loi de $Z = X_1 + X_2$

la densité $h(z)$ de Z est :

Soit $x > 0$

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(z-x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} e^{-\beta x} x^{\alpha_1 - 1} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \cdot \frac{\beta^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta(z-x)} (z-x)^{\alpha_2 - 1} \mathbb{1}_{\{z-x \geq 0\}}\, dx$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta z} \int_0^z x^{\alpha_1 - 1} (z-x)^{\alpha_2 - 1}\, dx$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta z} \int_0^z x^{\alpha_1 - 1} z^{\alpha_2 - 1} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\alpha_2 - 1} dx$$

soit $t = \frac{x}{z}$; $x = tz$; $dt = \frac{dx}{z}$; $dx = z\, dt$

$$h(z) = \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta z} \int_0^1 z^{\alpha_2-1}(1-t)^{\alpha_2-1} t^{\alpha_1-1} z^{\alpha_1-1} z \, dt$$

$$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta z} \int_0^1 t^{\alpha_1-1} z^{\alpha_1+\alpha_2-1} (1-t)^{\alpha_2-1} dt$$

$$= \underbrace{\frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\beta z} z^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}}_{\text{= densité de la loi gamma } \Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)} \underbrace{\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1} \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} dt}_{\text{= 1, densité de la loi bêta.}}$$

Donc $Z = X_1 + X_2$ suit une loi gamma $\Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \beta)$.

5°) Soit Z une v.a. normale centrée réduite $N(0,1)$. Soit φ sa fonction de répartition. Soit g sa fonction de densité et ϕ sa fonction de répartition. Soit h la fonction de densité de Z^2. Calculons la loi de Z^2.

$$P(Z^2 \leq z) = P(-\sqrt{z} \leq Z \leq \sqrt{z})$$
$$= \phi(\sqrt{z}) - \phi(-\sqrt{z})$$

Dérivons par rapport à z ; nous obtenons :

$$h(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}\left(g(\sqrt{z}) + g(-\sqrt{z})\right)$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{z}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z/2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{-1/2} e^{-z/2} = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} z^{\frac{1}{2}-1} e^{-z/2}$$

Donc $Z^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

fin des corrigés.

Deux autres méthodes pour la 3ème et la 4ème questions de l'exercice 2 :

Méthode par la fonction génératrice des moments :

* La fonction génératrice des moments d'une v.a. $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ est donnée par :

$$M(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}\, dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-(\beta-t)x} x^{\alpha-1}\, dx$$

$\int_0^{\infty} e^{-(\beta-t)x} x^{\alpha-1}\, dx$ est convergente ssi $\beta > t$.

Dans ce cas, en posant $y = (\beta - t)x$, on a

$$M(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-(\beta-t)x} x^{\alpha-1}\, dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{y^{\alpha-1}}{(\beta-t)^\alpha}\, dy = \frac{\beta^\alpha}{(\beta-t)^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$$

$$M'(t) = \frac{\beta^\alpha \alpha}{(\beta-t)^{\alpha+1}}$$

$$E(X) = M'(0) = \frac{\beta^\alpha \alpha}{\beta^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$M''(t) = \frac{\beta^\alpha \alpha(\alpha+1)}{(\beta-t)^{\alpha-2}}$$

$$E(X^2) = M''(0) = \frac{\beta^\alpha \alpha(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+2}} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

* $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$ indép.
  $X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$

$$M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indép.)}$$

$$= \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_2} = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}$$

D'où $X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

Methode par la fonction caractéristique :

* La fonction caractéristique de $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ est donnée par :

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{itx} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}\, dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(\beta-it)x} x^{\alpha-1}\, dx$$

Soit $D = \{ z \in \mathbb{C} ,\ Re(z) < \beta \}$ et pour $z \in D$

$$\phi(z) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(\beta - z)x} x^{\alpha-1}\, dx$$

ϕ est bien définie sur D car pour tout $z \in D$,

$$\left| e^{-(\beta-z)x} x^{\alpha-1} \right| \leq x^{\alpha-1} e^{-(\beta - Re(z))x}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $z \in D \cap \mathbb{R}$, alors $\phi(z) = \dfrac{\beta^\alpha}{(\beta - z)^\alpha}$

soit $z \in D$, $Re(\beta - z) > 0$, donc (en prenant la la détermination principale du log complexe) la fonction $h : z \longmapsto \dfrac{\beta^\alpha}{(\beta - z)^\alpha}$ est holomorphe sur D. De plus $h_{|D} = \phi_{|D}$.

Montrons maintenant que ϕ est holomorphe sur D.

Soit $K \subset D$ compact. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K \subset D_\varepsilon = \{ z \in \mathbb{C},\ Re(z) < \beta - \varepsilon \}$. Posons alors

$$g(x, z) = e^{-(\beta - z)x} x^{\alpha-1}$$

g est une fonction de C^1 et

$$\left| \frac{\partial g}{\partial z}(x, z) \right| = \left| x^\alpha e^{-(\beta - z)x} \right| \leq x^\alpha e^{-\varepsilon x}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et indépendante de z.

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale,

$$\phi'(z) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial z}(x,z)\, dx$$

Donc ϕ est holomorphe sur K pour tout compact $K \subset D$,
donc ϕ est holomorphe sur D.

Par le théorème des zéros isolés, on a $h = \phi$ sur D.

· Finalement, $\varphi(t) = \phi(it) = h(it) = \dfrac{\beta^\alpha}{(\beta - it)^\alpha}$.

$$\varphi(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^\alpha \Rightarrow \varphi'(t) = \frac{\beta^\alpha \alpha i}{(\beta - it)^{\alpha+1}}$$

$$* \quad E(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = \frac{\beta^\alpha \alpha}{\beta^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\varphi''(t) = \frac{i^2 \beta^\alpha \alpha(\alpha+1)}{(\beta - it)^{\alpha+2}}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = \frac{\beta^\alpha \alpha(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+2}} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$*$ $\quad X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta)$ $\quad$ indép.
$\quad X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t) . \varphi_{X_2}(t) \quad (\text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indép.})$$

$$= \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha_2} = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}$$

D'où $X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.