Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2020/2021
Masters MAF et MAP
Semestre 1

Rattrapage de Probabilités

Durée: 1h30

Exercice 1 : (4 points)
Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de variables aléatoires, et X et Y deux variables aléatoires telles que $P(Y_n = 0) = P(Y = 0) = 0$. Soit C une constante réelle non nulle. Montrer que :

1. Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} C$, alors $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X}{C}$.
2. Si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$, alors $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{X}{Y}$.

Exercice 2 : (6 points)
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer que $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si, et seulement si, $\forall \varepsilon > 0$, $P(\limsup_n |X_n - X| \geqslant \varepsilon) = 0$
2. Montrer que, si $\forall \varepsilon > 0$, $\sum_n P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) < \infty$, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.
3. Montrer que, si les X_n, $(n \geqslant 1)$, sont mutuellement indépendantes, alors
   $X_n \xrightarrow{p.s.} 0$ si, et seulement si, $\sum_n P(|X_n| \geqslant \varepsilon) < \infty$, $\forall \varepsilon > 0$.

Exercice 3 : (5 points)
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, telles que la loi des X_n est donnée par :

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$$

$$\text{et } P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Montrer que $E(S_n) \sim \ln n, Var(S_n) \sim \ln n$, quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que $Y_n = \frac{S_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 4 : (5 points)
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, de même loi, centrées, de variance σ^2. On pose $S_n = \sum_{m=1}^{n} X_m$.
Soit $(N_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, toutes indépendantes de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.
On définit une suite de variables aléatoires $Z_k = \frac{1}{\sqrt{N_k}} S_{N_k}$.
Montrer que si $N_k \xrightarrow{p.s.} +\infty$ quand $k \to +\infty$, alors Z_k converge en loi vers une variable aléatoire que l'on déterminera.

Bonne Chance !