Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2021/2022
Masters MAF et MAP
Semestre 1

Contrôle de Probabilités

Durée: 1h30

Exercice 1 : (8 points)
Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer la loi de S_n, son espérance mathématique et sa variance.
2. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z.
3. En déduire que $e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
4. Montrer que $\int_0^\infty P(Y_n > x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty P(Z > x)dx$ et calculer cette limite.
5. Montrer que $\int_0^\infty P(Y_n > x)dx = e^{-n} n^n \sqrt{n}/n!$.
6. En déduire la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$
   (lorsque $n \to +\infty$, un équivalent de $n!$ est $n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$).

Exercice 2 : (12 points)
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire, définies toutes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Posons pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E_n(\varepsilon) = \{|X_n| > \varepsilon\}$$

$$E(\varepsilon) = \limsup_n E_n(\varepsilon) = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} E_k(\varepsilon)$$

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 presque sûrement si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $P(E(\varepsilon)) = 0$.
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 presque sûrement si, et seulement si, la suite de terme général $Y_n = \sup_{k\geqslant n} |X_k|$ converge vers 0 en probabilité.
3. Montrer que si, pour tout $\varepsilon > 0$, la série de terme général $P(|X_n| > \varepsilon)$ est convergente, alors la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 presque sûrement.
4. Montrer que s'il existe $r > 0$ tel que la série de terme général $E(|X_n|^r)$ soit convergente, alors la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0 presque sûrement.
5. Soit $r > 0$. Montrer que si la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en moyenne d'ordre r, alors elle converge en probabilité.
6. Supposons, dans cette question, que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est presque sûrement bornée. Montrer que si elle converge en probabilité vers une variable aléatoire X, alors, pour tout $r > 0$, elle converge vers X en moyenne d'ordre r.

Bonne Chance !