Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2022/2023
Masters MAF et MAP
Semestre 1

Rattrapage de Probabilités

Durée: 1h30

Exercice 1 : (6 points)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n = -1) = 1 - \tfrac{1}{(n+1)^2},$$
$$\text{et } P(X_n = n^2 - 1) = \tfrac{1}{(n+1)^2}.$$

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1 en probabilité.
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, presque sûrement, vers -1.
   Cette convergence a-t-elle lieu dans L^1 ?

Exercice 2 : (7 points)
Considérons une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_n > 0$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.
Soit $Z_n = X_n - [X_n]$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x.

1. Calculer la fonction de répartition de Z_n, que l'on notera F_n.
2. Montrer que pour tout t, $F_n(t)$ converge vers une fonction $F(t)$.
   F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire ?
   Si oui, identifier la loi de cette variable aléatoire.
3. Qu'a-t-on démontré sur la convergence de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 3 : (7 points)

1. Soient $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires et $(N_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires, indépendante de la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telles que $N_n \xrightarrow{P} +\infty$ lorsque n tend vers l'infini.
   Montrer que, si la suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une limite Y, alors la suite (Y_{N_n}) converge en loi vers la même limite Y.
2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de L^2, indépendantes, identiquement distribuées, centrées et réduites. On pose $Y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Soit d'autre part $(N_n)_{n\geqslant 1}$ une suite ayant les propriétés de la question 1 précèdente.
   Montrer que l'on a la version suivante du Théorème "central limite", $Y_{N_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ lorsque n tend vers l'infini.

Bonne Chance !