

EXAMEN FIN DE SESSION II

Matière : Statistiques

Niveau : 1^{ère} année

Durée : 3 Heures

Date :/05/2003

Nom :

Prénom :

Enseignant: Mr EL MEROUANI

Questions :

- 1) Citez les différents types de moyennes et classer-les par ordre croissant.
- 2) Donner l'expression de la moyenne généralisée d'ordre r .
Pour quelles valeurs de r on retrouve chaque moyenne citée à la 1^{ère} question ?
- 3) **Exercice:**

Le chiffre d'affaire d'une entreprise a augmenté de 5% la 1^{ère} année, de 7% les 2 années suivantes et de 4% les 3 années d'après.

Quelle est, en pourcentage, son augmentation annuelle moyenne ?

Problème n° 1 :

Soit la série statistique des salaires d'une entreprise :

Salaires	Nombre d'employés
X – 50	30
50 – 100	40
100 – 200	20
200 – 300	10

- 1) Retrouver la borne inférieure X de la première classe sachant que le salaire moyen est de 94.
(Pour la suite des calculs, reprenez la valeur trouvée à la première question.)
- 2) Donner l'interprétation et la valeur de la médiane ($Mé$).
- 3) Calculer le troisième quartile, le septième décile et le percentile 35.
- 4) Déterminer la variance et l'écart-type.
- 5) Donner l'interprétation et la valeur de la médiale (Ml).
- 6) Que peut-on dire de la différence $\Delta M = Ml - Mé$? Comparer-la à l'étendue. Interpréter le résultat.
- 7) Construire la courbe de Lorenz.
- 8) Déterminer l'indice de concentration de Gini. Conclure.

Problème n° 2 :

Une étude sur l'épargne locale auprès des agences relevant des délégations provinciales de la Poste a permis d'établir les caractéristiques des versements à la

caisse d'épargne, au cours d'une journée type, dans la région Tanger-Tétouan. Ces caractéristiques sont résumées dans le tableau ci-après :

Etat de versement à la Caisse d'épargne	Tanger	Tétouan
Nombre de versements	35	30
Versements moyens	2200	2400
Variances des versements	3025	3600

- 1) Donner le versement moyen pour l'ensemble de la région Tanger-Tétouan.
- 2) Calculer la variance intra-ville et la variance inter-ville des versements. Quelle est la variance régionale des versements ?
- 3) Comparer la dispersion des versements à Tanger et Tétouan, en utilisant le coefficient de variation.

BON COURAGE !

Problème n° 1:

1)

$[e_{i-1}, e_i[$	n_i	c_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^{\uparrow}$	$(c_i - \bar{X})^2$	$n_i (c_i - \bar{X})^2$
$[X, 50[$	30	c_1	$30c_1$	30	4096	122880
$[50, 100[$	40	75	3000	70	361	14440
$[100, 200[$	20	150	3000	90	3136	62720
$[200, 300[$	10	250	2500	100	24336	243360
	$N=100$		9400			443400

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^4 n_i c_i = \frac{30c_1 + 9500}{100} = 94$$

$$\Rightarrow 30c_1 = 100(94 - 85) = 900 \Rightarrow c_1 = \frac{900}{30} = 30$$

$$\frac{X + 50}{2} = 30 \Rightarrow X = 60 - 50 = \underline{\underline{10}}$$

2) La médiane est le salaire pour lequel on a 50 employés ont un salaire inférieure au salaire médiane et autres 50 employés ont un salaire supérieur au salaire médiane.

$$\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

$$M_e = e_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - n_{(i-1)} c_i^{\uparrow}}{n_i} \times c_i$$

$\Rightarrow 70$ est la ¹ère valeur supérieure à 50 $\Rightarrow [50, 100[$ la classe médiane

$$M_e = 50 + \frac{50 - 30}{40} \cdot 50 = 50 + \frac{20}{40} \cdot 50 = 50 + 25 = 75$$

$$Q_3 = e_{i-1} + \frac{\frac{N}{4} \cdot 3 - n_{i-1} c_i^{\uparrow}}{n_i} \times c_i$$

3) $\frac{N}{4} \cdot 3 = \frac{100}{4} \cdot 3 = 75$

$\Rightarrow 90$ est la ¹ère valeur supérieure à 75 $\Rightarrow Q_3 = 100 + \frac{75 - 70}{20} \cdot 100$

$$\Rightarrow Q_3 = 100 + \frac{5}{20} \cdot 100 = 125$$

(2)

$\frac{N}{10} \cdot 7 = \frac{100}{10} \cdot 7 = 70$ cette valeur apparaît dans le tableau
 alors on prend $D_7 = 100$

$\frac{N}{100} \cdot 35 = 35 \Rightarrow$ la 1^{ère} valeur supérieure à 35 est 70
 $\Rightarrow P_{35} = 50 + \frac{35 - 30}{40} \cdot 50$
 $\Rightarrow P_{35} = 50 + 6,25 = 56,25$

4) $Var(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{10} (c_i - \bar{x})^2 n_i = 4434$

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{4434} \approx 66,59$

5) La Médiane est la valeur de la variable qui divise soit la
 masse salariale totale (9400) en deux blocs égaux de
 4700 chacun.

$\frac{9400}{2} = 4700$

$\Rightarrow Me = 100 + \frac{4700 - 3900}{3000} \cdot 100$

$\Rightarrow Me = 100 + \frac{800 \cdot 100}{3000} = 126,67$

$Me = e_{i-1} + \frac{\sum_{j=1}^i n_j c_j - (n_{i-1} c_{i-1})}{n_i c_i} \cdot c_i$

la classe médiane
 [100, 200[←

$(n_i c_i) \uparrow$
900
3900
6900*
9400

6) ΔM mesure la différence entre les valeurs centrales (correspondant à 50%) correspondant d'un côté à la masse salariale totale et de l'autre côté au nombre d'employés. Nous avons $Me > M_e$, d'où $\Delta M > 0$. Dans notre cas $\Delta M = 126,67 - 75 = 51,67$

L'utilité de cette différence réside dans le fait qu'on peut la comparer à l'étendue de la série qui est l'intervalle de variation

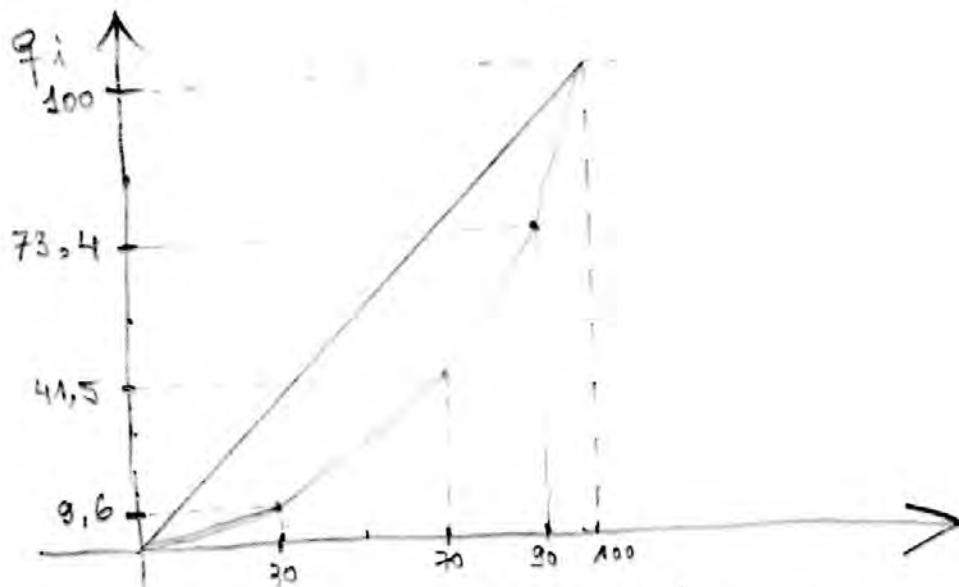
de la variable salariaire : étendue = $300 - 10 = 290$

$$\frac{\Delta M}{290} = \frac{51,67}{290} \approx 0,178.$$

Cet indice signifie qu'on a une faible concentration des salaires.

7)

$(n_i c_i) \uparrow$	$P_i = \frac{n_i c_i}{N} \cdot 100$	$q_i = \frac{(n_i c_i) \uparrow}{\sum n_i c_i} \cdot 100$
900	30	9,574
3900	70	41,489
6900	90	73,404
9400	100	100
Total	290	224,467



Courbe de Concentration de Lorenz

8)

$$I_G = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{2.1} q_i}{\sum_{i=1}^{2.1} p_i} = 1 - \frac{124,5}{190} = 0,345$$

\Rightarrow faible concentration des salaires. (équidistribution)

(4)

Problème n°2:

1) Versement moyen pour l'ensemble est

$$\bar{X} = \frac{(35 \times 2200) + (30 \times 2400)}{35 + 30} = \frac{77000 + 72000}{65}$$

$$\bar{X} = \frac{149000}{65} \approx 2292,31$$

2) La variance totale se décompose en une variance inter-villes et une variance intra-villes, c'est-à-dire:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_i) + \text{Var}(\bar{X}_i)$$

$$\text{Var}(X_i) = \frac{1}{N} \left[N_1 \text{Var}(X_1) + N_2 \text{Var}(X_2) \right]$$

$$= \frac{1}{65} \left[(35 \times 3025) + (30 \times 3600) \right]$$

$$= \frac{1}{65} \left[105875 + 108000 \right] = \frac{213875}{65} \approx 3290,38$$

$$\text{Var}(\bar{X}_i) = \frac{1}{N} \left[N_1 (\bar{X}_1 - \bar{X})^2 + N_2 (\bar{X}_2 - \bar{X})^2 \right]$$

$$\text{Var}(\bar{X}_i) = \frac{1}{65} \left[35(2200 - 2292,31)^2 + 30(2400 - 2292,31)^2 \right]$$

$$\text{Var}(\bar{X}_i) = \frac{1}{65} \left[(35 \times 8521,14) + (30 \times 11597,14) \right]$$

$$\text{Var}(\bar{X}_i) = \frac{1}{65} (298239,9 + 347914,2) = \frac{646154,1}{65}$$

$$\text{Var}(\bar{X}_i) = 9940,83$$

$$\Rightarrow \text{Var}(X) = 3290,38 + 9940,83 = 13231,21$$

(5)

3) la comparaison de la dispersion des versements peut s'effectuer de plusieurs manières différentes, la plus simple d'entre elles consiste à utiliser un coefficient sans dimension qui est le coefficient de variation

$$CV = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}}$$

$$CV \text{ de Tanger} = \frac{\sqrt{3025}}{2200} = \frac{55}{2200} = 0,025$$

$$CV \text{ de Tétouan} = \frac{\sqrt{3600}}{2400} = \frac{60}{2400} = 0,025$$

CV est identique pour Tanger et Tétouan ce qui nous permet de conclure que la dispersion des versements à la caisse d'épargne est identique dans ces villes.