Université Abdelmalek Essaâdi Faculté polydisciplinaire de Tétouan Filière : Sciences Economiques & Gestion	Année universitaire : 2005-2006 Semestre : Cinquième Module : Informatique et Recherche Opérationnelle Enseignant : M. El Merouani

Contrôle continu n° 2 de Programmation Mathématique et Recherche Opérationnelle.

Durée 2 heures

Problème № 1 : 8 pts

Une entreprise s'adonne à la production de tables et de chaises. Le coût de production de chaque table est de 30DH et celui de chaque chaise est de 20DH. Le marché de vente peut absorber une production d'au plus 3 tables et 4 chaises par jour. De plus le nombre total de tables et de chaises vendues ne peut excéder 5 unités par jour. Une fois que l'assemblage est complété, chaque table requiert 2 heures de séchage et chaque chaise requiert 1 heure de séchage pour permettre à la colle de se fixer. L'appartement où se fait le séchage ne peut contenir qu'une seule item à la fois. De plus, pour des raisons économiques on exige que l'appartement soit utilisé au moins 5 heures par jour. L'empaquetage d'une table requiert 2 opérations et celle d'une chaise requiert 4 opérations sur une machine. Pour des raisons économiques de mise au point de la machine on exige que le nombre total d'opérations exécutées soit au moins égal à 8 par jour.

L'entreprise désire déterminer le nombre de tables et de chaises à produire par jour pour minimiser le coût total.

1. Formuler ce problème sous forme d'un problème de programmation linéaire. 4 pts
2. 1 Peut-on appliquer la méthode graphique pour résoudre ce problème ? Pourquoi ? Si oui, 2 appliquer-la pour le résoudre et donner l'interprétation économique de la solution 1 optimale.

Problème № 2 : 12 pts

On considère le problème linéaire suivant:

$$\text{Min } Z=3x_1+4x_2+5x_3$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 \geq 5 \\ 2x_1+2x_2+x_3 \geq 6 \\ x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Résoudre ce problème linéaire en utilisant la **méthode des deux phases du simplexe.** 4
2. Résoudre ce problème linéaire en utilisant la **méthode duale du simplexe**. 4 pts
3. Appliquer l'**analyse post-optimale** pour étudier les modifications suivantes : 4 pts
   a) La contrainte $2x_1+2x_2+x_3 \geq 6$ est remplacée par $2x_1+2x_2+2x_3 \geq 6$. → 2
   b) Ajouter, aux contraintes, la contrainte $x_1+x_2+2x_3 \geq 4$. → 2
   (Dans chacun des cas, donner une solution optimale du nouveau problème).

Pb n° 1 Contrôle n° 2 de Prog. Math. & R.O. 2005/2006

1°/ Activités — Amplitudes

Activités	Amplitudes
nombre de chaises à produire/jour	x
" tables "	y

Fonction économique :

$$\text{Min } Z = 20x + 30y$$

Contraintes :

$$x \leq 4$$
$$y \leq 3$$
$$x + y \leq 5$$
$$x + 2y \geq 5$$
$$4x + 2y \geq 8$$
$$x, y \geq 0$$

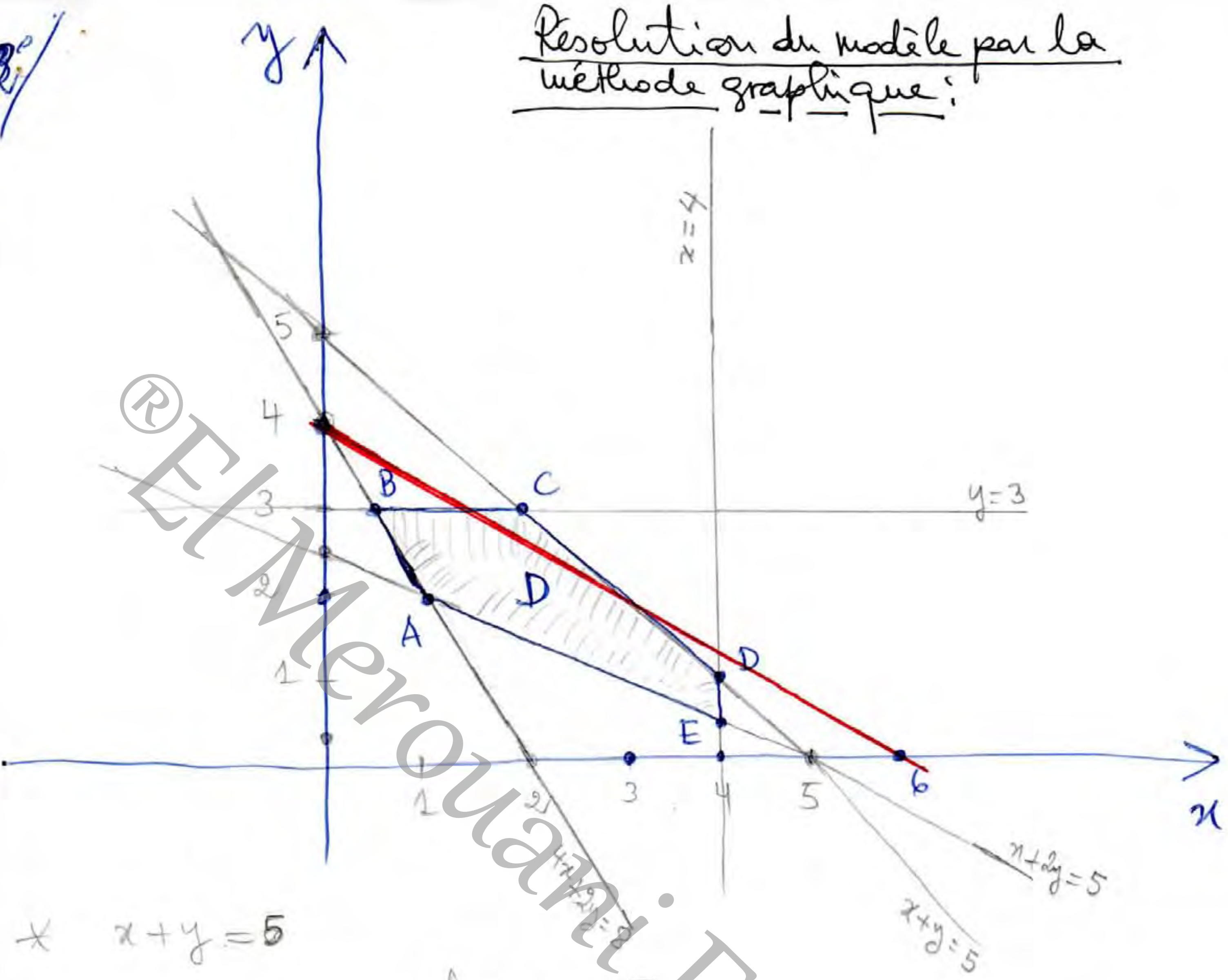
Donc le modèle linéaire cherché est :

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 20x + 30y \\ \text{Sujet à } \quad & x + y \leq 5 \\ & x + 2y \geq 5 \\ & 4x + 2y \geq 8 \\ & 0 \leq x \leq 4 \\ & 0 \leq y \leq 3 \end{aligned}$$

2°/ Oui, on peut appliquer la méthode graphique pour résoudre ce problème car il fait intervenir seulement 2 variables.

2°/

Résolution du modèle par la méthode graphique :



* $x + y = 5$

si $x = 0$ alors $y = 5$

si $y = 0$ alors $x = 5$

* $x + 2y = 5$

si $x = 0$ alors $y = \frac{5}{2} = 2{,}5$

si $y = 0$ alors $x = 5$

* $4x + 2y = 8 \Leftrightarrow 2x + y = 4$

si $x = 0$ alors $y = 4$

$y = 0$ $x = 2$

$20x + 30y = 60$

si $x = 0$ alors $y = 2$

" $y = 0$ " $x = 3$

$20x + 30y = 120$

$x = 0 \Rightarrow y = 4$

$y = 0 \Rightarrow x = 6$

$C(x, y)$?

$y = 3$ et $x + y = 5 \Rightarrow x = 5 - y = 5 - 3 = 2$

$C(2,3) \Rightarrow Z = 20 \times 2 + 30 \times 3 = 40 + 90 = 130$

$B(x.y)$ $y = 3$ et $4x + 2y = 8 \Rightarrow 4x = 8 - 2y$

$\Rightarrow 2x = 4 - y \Rightarrow 2x = 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$B(\frac{1}{2}, 3) \Rightarrow Z = 10 + 90 = 100$

$D(x.y)$ $x = 4$ et $y = 5 - x = 1$

$D(4,1) \Rightarrow Z = 80 + 30 = 110$

$A(x,y)$ $4x + 2y = 8$ (1) $\quad$ (1) $-$ (2) $\Rightarrow +3x = 3$

$x + 2y = 5$ (2) $\quad \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$

$A(1,2) \Rightarrow Z = 20 + 60 = 80$

$E(x,y)$ $x = 4$ et $x + 2y = 5$

$\Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$E(4, \frac{1}{2}) \Rightarrow Z = 80 + 15 = 95$

Le minimum est $Z = 80$ atteint en $A(1,2)$

3) le pb est :

$$\text{Min } Z = 20x_1 + 30x_2$$

Sujet à
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$4x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$x_1 \leq 4$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Interprétation économique :

il faut fabriquer une chaise et deux tables par jour pour minimiser le coût total jusqu'à ce qu'il atteint 80DH

Sa forme standard est :

$$\text{Min } Z = 20x_1 + 30x_2$$

Sujet à
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 5$$
$$4x_1 + 2x_2 - x_5 = 8$$
$$x_1 + x_6 = 4$$
$$x_2 + x_7 = 3$$
$$x_i \geq 0$$

... 30 1 31 1 2 3 4 5

Problème 2 :

1. La forme standard est :

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$\text{Sujet à } \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 6$$
$$x_i \geq 0$$

Méthode des deux phases :

Soit $M = t_1 + t_2$ avec

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + t_1 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + t_2 = 6$$
$$x_i \geq 0 \qquad t_i \geq 0$$

donc $\quad t_1 = 5 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4$

$\quad t_2 = 6 - 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5$

alors $\quad M = -3x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 + 11$

Les contraintes $\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + t_1 = 5$

$\quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + t_2 = 6$

$\quad 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - Z = 0$

$\quad x_i \geq 0 \qquad t_i \geq 0$

Phase I :

V.e : x_2 ; V.P : t_1

V.b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	$-M$	$-Z$	T.d.
t_1	1	$\boxed{2}$ pivot	3	-1	0	1	0	0	0	5
t_2	2	2	1	0	-1	0	1	0	0	6
$-Z$	3	4	5	0	0	0	0	0	1	0
$-M$	-3	-4	-4	1	1	0	0	1	0	-11

V. b.	x_1 V.e	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	$-M$	$-Z$	T.d.
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{5}{2}$
V.P t_2	1 pivot	0	-2	1	-1	-1	1	0	0	1
$-Z$	1	0	-1	2	0	-2	0	0	1	-10
$-M$	-1	0	2	-1	1	2	0	1	0	-1

V. b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2	$-M$	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	$5/2$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
x_1	1	0	-2	1	-1	-1	1	0	0	1
$-Z$	0	0	1	1	1	-1	-1	0	1	-11
$-M$	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0

$M = 0 \Rightarrow$ L'ensemble des sol^{ns} est $\neq \emptyset$

Phase II :

V. b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$	T. d.
x_2	0	1	$5/2$	-1	$1/2$	0	2
x_1	1	0	-2	1	-1	0	1
$-Z$	0	0	1	1	1	1	-11

On est à l'optimum, sol^{n} opt. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$
$x_4 = x_5 = 0$ $x_3 = 0$ et la valeur opt. $Z = 11$

2°/ Méthode duale du simplexe :

$$\text{Min } 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

Sujet à
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La forme standard du problème est :

$$\text{Min } 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

Sujet à
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Alors, on transforme le problème de la façon suivante :

$$\text{Min } 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

Sujet à
$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5$$
$$-2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Le tableau initial de l'algorithme dual du simplexe est :

V.b.	x_1 (V.e)	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$	T.d.
x_4	-1	-2	-3	1	0	0	-5
V.s x_5	$\boxed{-2}$ pivot	-2	-1	0	1	0	-6 ←
$-Z$	3	4	5	0	0	1	0

La valeur négative la plus petite parmi les termes de droite est -6, donc x_5 est la variable de sortie.

On divise les coeff. des V.H.B. dans la ligne de Z par ceux de la ligne de la V.s., on obtient :

$$\frac{3}{-2} = -1,5 \quad ; \quad \frac{4}{-2} = -2 \quad \text{et} \quad \frac{5}{-1} = -5$$

le pivot est donc $\boxed{-2}$ car il correspond à la valeur la plus grande qui est négative après cette division ; d'où la variable d'entrée (V.e.) est x_1

le $2^{\text{ème}}$ tableau de l'algorithme dual du simplexe est :

V.b.	x_1	x_2 V.e	x_3	x_4	x_5	$-Z$	T.d.
V.s. x_4	0	$\boxed{-1}$ pivot	$-\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	-2 ←
x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	3
$-Z$	0	1	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	-9

On répète la même chose pour ce tableau, on a :

-2 la valeur négative la plus petite parmi les T.d.

donc x_4 est la variable de sortie (V.s.)

On divise les coeff. de V.h.b. dans la ligne de Z par ceux de la ligne correspondante à la V.s., on a:

$$-1, \quad \frac{7}{2} \times \frac{-2}{5} = -1,4 \quad ; \quad \frac{3}{2} \times -2 = -3$$

La valeur la plus grande négative parmi ces divisions correspond au pivot $\boxed{-1}$ de x_2 V.e.

le $3^{\text{ème}}$ tableau de l'algorithme dual du simplexe est :

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	5/2	-1	1/2	0	2
x_1	1	0	-2	1	-1	0	1
$-Z$	0	0	1	1	1	1	-11

Tous les termes de droite sont positifs, on arrête !

La solution optimale est $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

La valeur optimale est $Z = 11$.

Rqs : * C'est la même solution trouvée par la méthode des 2 phases ($1^{ère}$ /).

* les tableaux optimals sont identiques (dans les deux méthodes).

3. Analyse post_optimale :

a) Lorsqu'on remplaçe la contrainte $2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$ par $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 6$, la modification sera faite dans la $2^{ème}$ contrainte au niveau des coeff. de x_3 ! D'où à partir du tableau optimal on a :

V.b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	5/2	-1	1/2	0	2
x_1	1	0	$-2+\delta$	1	-1	0	1
$-Z$	0	0	1	1	1	1	-11

c'est-à-dire que le coeff. de x_3 est susceptible de varier d'une valeur non-négative δ.

Mais cette variation n'influe pas sur l'optimum, donc on aura la même solution optimale sans aucun changement car x_3 est une variable hors base à l'optimum.

b) Soit la nouvelle contrainte $x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4$

Soit $x_6 \geq 0$, variable de surplus ; $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 = 4$

Alors, dans le tableau optimal, on ajoute une ligne de la façon suivante :

V.b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-Z$	T.d.
x_2	0	$\boxed{1}$	5/2	-1	1/2	0	0	2
x_1	$\boxed{1}$	0	-2	1	-1	0	0	1
x_6	1	1	2	0	0	$\boxed{-1}$	0	4
$-Z$	0	0	1	1	1	0	1	-11

et on cherche de nouveau, le tableau optimum :

V.b.	x_1	x_2	x_3 (V.e)	x_4	x_5	x_6	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	5/2	-1	1/2	0	0	2
x_1	1	0	-2	1	-1	0	0	1
V.P x_6	-1	-1	$\boxed{-2}$ pivot	0	0	1	0	-4 ←
$-Z$	0	0	1	1	1	0	1	-11

division : $\frac{1}{-2} = -2$; $\frac{1}{0} = \infty$; $\frac{1}{0} = \infty$

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	T.d.
x_2	$5/4$	$1/4$	0	1	$-1/2$	$-5/4$	0	3
x_1	2	1	0	1	-1	-1	0	5
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
$-z$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	1	$\frac{1}{2}$	1	-13

V.b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	T.d.
x_2	0	$-3/8$	0	$3/8$	$1/8$	$-5/8$	0	$-1/8$
x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$	0	$5/2$
x_3	0	$1/4$	1	$-1/4$	$1/4$	$-1/4$	0	$3/4$
$-z$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{87}{4}$

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$-z$	T.d.
x_2	0	1	0	-1	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{5}{3}$	0	$+1/3$
x_1	1	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$7/3$
x_3	0	0	1	0	$1/3$	$-2/3$	0	$5/6$
$-z$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{13}{12}$	1	$-259/12$

la nouvelle solution optimale est :

$$x_1 = \frac{7}{3} \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad ; \quad x_3 = \frac{5}{6}$$

et la valeur optimale $Z = -\frac{259}{12} \simeq -21,58$.