Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
Tétouan

Année Universitaire 2006/2007
LP Informatique de Gestion
Recherche Opérationnelle

# *Contrôle continu final (Durée 2 heures)*

**Problème n° 1:**

Le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 4x_1+8x_2+3x_3 \\ \text{Sujet à} & x_1+x_2 \geq 2 \\ & 2x_2+x_3 \geq 5 \\ & x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{array}$$

peut être transformé sous la forme suivante à laquelle s'applique directement l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 4x_1+8x_2+3x_3+Wx_6+Wx_7 \\ \text{Sujet à} & x_1+x_2-x_4+x_6=2 \\ & 2x_2+x_3-x_5+x_7=5 \\ & x_1,x_2,x_3 \geq 0 \end{array}$$

où W est un réel arbitrairement grand.

1. Quel est le rôle des variables $x_4$ et $x_5$ ?
2. Quel est le rôle des variables $x_6$ et $x_7$ ?
3. Pourquoi introduire $x_6$ et $x_7$ après avoir introduit $x_4$ et $x_5$ ?
4. Quel est le rôle de W ? Démontrer que si la valeur de W>0 est suffisamment grande alors la suite des itérations pour résoudre cette forme est identique à celle d'une phase I suivi d'une résolution du problème original.

**Problème n° 2:**

Utiliser la méthode duale du simplexe pour résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} & \text{Min } 3x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{Sujet à} & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & 3x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ & -x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

**Problème n° 3:**

1. Appliquer la méthode des deux phases du simplexe pour résoudre le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} & \text{Min } 30x_1 + 24x_2 + 18x_3 \\ \text{Sujet à} & 5x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 8 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

2. Quelle est l'intervalle de variation post-optimale du coût marginal de $x_1$ ?
3. Appliquer l'analyse de sensibilité pour étudier l'ajout de cette nouvelle contrainte $2x_1+x_2+2x_3 \geq 4$ au problème.

LP Infor. Gestion — Année Universitaire 2006-2007

# Correction du Contrôle final de Recherche Opérationnelle

## Problème n° 1 :

1°) Les variables $x_4$ et $x_5$ sont des variables de surplus ou d'éxcédent qui servent à rendre le problème de programmation linéaire sous la forme standard.

2°) Les variables $x_6$ et $x_7$ sont des variables artificielles et servent à rendre le problème sous sa forme canonique.

3°) On introduit $x_6$ et $x_7$ après avoir introduit $x_4$ et $x_5$ car $x_4$ et $x_5$ ont des coefficients négatifs.

4°)

| V.b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $-Z$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_6$ | 1 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $x_7$ | 0 | 2 | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $-Z$ | 4 | 8 | 3 | 0 | 0 | W | W | 1 | 0 |

$x_6$ et $x_7$ sont des variables de bases, donc dans leurs colonnes dans le tableau, on doit avoir 1 en face de $x_6$ et $x_7$ et des zéros ailleurs. C'est la forme canonique.

le tableau canonique est :

| V.b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $-Z$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_6$ | 1 | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $x_7$ | 0 | 2 | 1 | 0 | $-1$ | 0 | 1 | 0 | 5 |
| $-Z$ | $4-W$ | $8-3W$ | $3-W$ | $W$ | $W$ | 0 | 0 | 1 | $-7W$ |

le problème transformé admet une solution réalisable, donc le problème original admet lui aussi une solution réalisable puisque on peut effectuer des pivots car $8-3W<0$ pour $W$ assez grand, donc $x_6$ peut sortir de la base et $x_2$ la remplacer. De même, on peut faire sortir $x_7$ de la base et $x_3$ la remplace.

- On suppose que $W>0$ et assez grand, donc

$$\text{Min } Z = 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + W(x_6 + x_7)$$

revient à commencer par minimiser $W(x_6+x_7)$ ce qui revient à minimiser $x_6+x_7$, ceci est équivalent à une première phase de la méthode des 2 phases.

## Problème n° 2 :

La forme standard du problème est :

$$\text{Min } Z = 3x_1 + x_2 + x_3$$

Sujet à
$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 8$$
$$3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 = 6$$
$$-x_1 - x_2 + 4x_3 - x_6 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Alors, on transforme le problème de la façon suivante :

$$\text{Min } Z = 3x_1 + x_2 + x_3$$

Sujet à
$$-x_1 - 2x_2 + x_4 = -8$$
$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = -6$$
$$x_1 + x_2 - 4x_3 + x_6 = -2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

| V.b. | $x_1$ | $x_2$ (V.e) | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $-Z$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_4$ (V.s.) | $-1$ | $\boxed{-2}$ pivot | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | $-8$ ← |
| $x_5$ | $-3$ | 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $-6$ |
| $x_6$ | 1 | 1 | $-4$ | 0 | 0 | 1 | 0 | $-2$ |
| $-Z$ | 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

| V.b. | $x_1$ V.e | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $-Z$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | $1/2$ | 1 | 0 | $-1/2$ | 0 | 0 | 0 | 4 |
| V.s. $x_5$ | $\boxed{-4}$ pivot | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | $-14$ ← |
| $x_6$ | $1/2$ | 0 | $-4$ | $1/2$ | 0 | 1 | 0 | $-6$ |
| $-Z$ | $5/2$ | 0 | 1 | $1/2$ | 0 | 0 | 1 | $-4$ |

| V.b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ V.e | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $-Z$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | $1/8$ | $-3/8$ | $1/8$ | 0 | 0 | $9/4$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-1/4$ | $-1/4$ | $-1/4$ | 0 | 0 | $7/2$ |
| V.p $x_6$ | 0 | 0 | $\boxed{-31/8}$ pivot | $5/8$ | $1/8$ | 1 | 0 | $-31/4$ ← |
| $-Z$ | 0 | 0 | $13/8$ | $9/8$ | $5/8$ | 0 | 1 | $19/4$ |

| V.b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $-Z$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | $-11/31$ | $4/31$ | $1/31$ | 0 | 2 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $-9/31$ | $-8/31$ | $-2/31$ | 0 | 4 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $-5/31$ | $-1/31$ | $-8/31$ | 0 | 2 |
| $-Z$ | 0 | 0 | 0 | $43/31$ | $21/31$ | $13/31$ | 1 | $3/2$ |

Tous les termes de droites (et aussi les coefficients de $Z$) sont positifs ou nuls, donc on est à l'optimum et une solution optimale est $x_1 = 4$ ; $x_2 = 2$ ; $x_3 = 2$ ; $x_4 = x_5 = x_6 = 0$

La valeur optimale est $Z = -3/2$

## Problème n° 3 :

1°/ la forme standard est :

$$\text{Min } 30x_1 + 24x_2 + 18x_3$$

Sujet à $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$

Soient $t_1$ et $t_2$ les variables artificielles et soit $M = t_1 + t_2$ le problème devient après l'introduction de ces variables non-négatives dans ses contraintes :

$$\text{Min } 30x_1 + 24x_2 + 18x_3$$

Sujet à $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + t_1 = 8 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_5 + t_2 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$

$t_1 = 8 - 5x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4$

$t_2 = 6 - 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_5$

Alors $M = -8x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 + 14$

Phase I : $\text{Min } M = -8x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 + 14$

Sujet à $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + t_1 = 8 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_5 + t_2 = 6 \\ 30x_1 + 24x_2 + 18x_3 - Z = 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$

| V.b. | $x_1$ (V.e) | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $t_1$ | $t_2$ | $-Z$ | $-M$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V.P $t_1$ | $\boxed{5}$ pivot | 2 | 1 | −1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| $t_2$ | 3 | 3 | 3 | 0 | −1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 6 |
| $-Z$ | 30 | 24 | 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $-M$ | −8 ↑ | −5 | −4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | −14 |

| V.b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ (V.e) | $x_4$ | $x_5$ | $t_1$ | $t_2$ | $-Z$ | $-M$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 2/5 | 1/5 | −1/5 | 0 | 1/5 | 0 | 0 | 0 | 8/5 |
| V.P $t_2$ | 0 | 9/5 | $\boxed{12/5}$ pivot | 3/5 | −1 | −3/5 | 1 | 0 | 0 | 6/5 |
| $-Z$ | 0 | 12 | 12 | 6 | 0 | −6 | 0 | 1 | 0 | −48 |
| $-M$ | 0 | −9/5 | −12/5 ↑ | −3/5 | 1 | 8/5 | 0 | 0 | 1 | −6/5 |

| V.b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $t_1$ | $t_2$ | $-Z$ | $-M$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1/4 | 0 | −1/4 | 1/12 | 1/4 | −1/12 | 0 | 0 | 3/2 |
| $x_3$ | 0 | 3/4 | 1 | 1/4 | −5/12 | −1/4 | 5/12 | 0 | 0 | 1/2 |
| $-Z$ | 0 | 3 | 0 | 3 | 5 | −3 | −5 | 1 | 0 | −54 |
| $-M$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$M=0$, donc l'ensemble des solutions est non vide. Une solution de base réalisable du pb. originale est $x_1 = 3/2$ ; $x_2 = 0$ ; $x_3 = 1/2$ ; $x_4 = 0$ ; $x_5 = 0$ ; $t_1 = 0$ ; $t_2 = 0$

## Phase II :

| V.b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $-Z$ | T. d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1/4 | 0 | -1/4 | 1/12 | 0 | 3/2 |
| $x_3$ | 0 | 3/4 | 1 | 1/4 | -5/12 | 0 | 1/2 |
| $-Z$ | 0 | 3 | 0 | 3 | 5 | 1 | -54 |

On est à l'optimum $Z = 54$

$x_1 = \frac{3}{2}$ ; $x_2 = 0$ ; $x_3 = \frac{1}{2}$

2°/

2°/

| V.b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $-Z$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | $1/4$ | 0 | $-1/4$ | $1/12$ | 0 | $3/2$ |
| $x_3$ | 0 | $3/4$ | 1 | $1/4$ | $-5/12$ | 0 | $1/2$ |
| $-Z$ | 0 | 3 | 0 | 3 | 5 | 1 | $-54$ |

| V.b | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $-Z$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | $1/4$ | 0 | $-1/4$ | $1/12$ | 0 | $3/2$ |
| $x_3$ | 0 | $3/4$ | 1 | $1/4$ | $-5/12$ | 0 | $1/2$ |
| $-Z$ | 0 | $3-\frac{\delta}{4}$ | 0 | $3+\frac{\delta}{4}$ | $5-\frac{\delta}{12}$ | 1 | $-54-\frac{3\delta}{2}$ |

$$\begin{cases} 3-\frac{\delta}{4} \geq 0 \\ 5-\frac{\delta}{12} \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 12 \geq \delta \\ 60 \geq \delta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\delta \leq 12}$$

3°/ $2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_6 = 4$

| V.b | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $-z$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1/4 | 0 | -1/4 | 1/12 | 0 | 0 | 3/2 |
| $x_3$ | 0 | 3/4 | 1 | 1/4 | -5/12 | 0 | 0 | 1/2 |
| $x_6$ | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | -1 | 0 | 4 |
| $-z$ | 0 | 3 | 0 | 3 | 5 | 0 | 1 | -54 |

| V.b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $-z$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1/4 | 0 | -1/4 | 1/12 | 0 | 0 | 3/2 |
| $x_3$ | 0 | 3/4 | 1 | 1/4 | -5/12 | 0 | 0 | 1/2 |
| $x_6$ | -2 | $\boxed{-1}$ pivot | -2 | 0 | 0 | 1 | 0 | -4 |
| $-z$ | 0 | 3 | 0 | 3 | 5 | 0 | 1 | -54 |

$\frac{3}{-1} = -3$







/2

| V.b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $-z$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1/4 | 0 | -1/4 | 1/12 | 0 | 0 | 3/2 |
| $x_3$ | 0 | 3/4 | 1 | 1/4 | -5/12 | 0 | 0 | 1/2 |
| $x_6$ | 0 | -1/2 | -2 | -1/2 | 1/6 | 1 | 0 | -1 |
| $-z$ | 0 | 3 | 0 | 3 | 5 | 0 | 1 | -54 |

| V.b. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $-z$ | T.d. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1/4 | 0 | -1/4 | 1/12 | 0 | 0 | 3/2 |
| $x_3$ | 0 | 3/4 | 1 | 1/4 | -5/12 | 0 | 0 | 1/2 |
| $x_6$ | 0 | 1 | 0 | 0 | -2/3 | 1 | 0 | 0 |
| $-z$ | 0 | 3 | 0 | 3 | 5 | 0 | 1 | -54 |

On est à l'optimum.