Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
Tétouan

Année Universitaire : 2008/2009
LF Sciences Économiques & de Gestion
LP Informatique de Gestion.

Contrôle final de Programmation Mathématique

Durée : 2 heures

Problème n°1 : 6

L'entreprise DURALUMIN fabrique pour des entreprises de quincaillerie, des pièces en inox. Ces pièces sont de trois types A, B, C. Elles sont fabriquées par lots de 50 dans un grand atelier où sont rassemblées deux machines pour la découpe de l'inox, une machine pour l'emboutissage, deux machines pour le polissage et la finition.
Chaque machine fonctionne 120 heures par mois.
Les caractéristiques de fabrication sont rassemblées dans le tableau suivant :

	Coût de l'heure	Lot A	Lot B	Lot C
Découpage	20 DH	1 heure	1,5 heure	1,5 heure
Emboutissage	30 DH	0,5 heure		1 heure
Polissage et finition	40 DH	2 heures	1 heure	1 heure
Inox		50 DH	85 DH	68 DH
Prix de Vente (hors taxe)		200 DH	200 DH	210 DH

L'objectif de DURALUMIN est de maximiser son profit.
Donner le modèle linéaire de ce problème.

Problème n°2 : 7

On considère le modèle linéaire suivant :

$$\text{Max } Z=\lambda x+7y$$

Sujet à
$$x - y \leq 6$$
$$2x+y \leq 4$$
$$y \leq 2$$
$$x, y \geq 0$$

1,5
1. Tracer sur un graphique, le domaine réalisable de ce modèle linéaire.
2
2. Calculer les coordonnées des points extrêmes de ce domaine.
1
3. Déterminer une solution optimale de ce modèle parmi les points extrêmes déterminés en 2°) lorsque λ=2.
1
4. Supposons que λ=12. S'assurer que l'on obtient la même solution optimale que pour le cas λ=2.
1,5
5. A quel intervalle doit appartenir λ, le coefficient de x dans la fonction économique Z, pour que cette solution reste optimale ?

Problème n°3 : ~~8~~ ~~6~~ 7

4
1. Utiliser la méthode duale du simplexe pour résoudre le problème linéaire suivant :

$$\text{Min } 3x_1+x_2+x_3$$

Sujet à
$$x_1+2x_2 \geq 8$$
$$3x_1 - 2x_2 - x_3 \geq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3
2. Déterminer l'intervalle dans-lequel le coefficient de la variable x_2 dans la fonction économique peut varier sans que la solution optimale change.

Bon courage !

S_5 éco 2008/2009

Correction du contrôle final de Programmation Mathématique

Problème n° 1

* D'abord, il faut calculer les marges par lots :

Pour A :

$1 \times 20 = 20$
$0{,}5 \times 30 = 15$
$2 \times 40 = 80$
$+ 50$
$200 - 165 = 35$

1 pt

de même, pour B, on trouve 45
pour C, on trouve 42

* **Action** — **Amplitudes**

Nombre de lots A ----------> x_1
Nombre de lots B ----------> x_2
Nombre de lots C ----------> x_3

1 pt

⇒ Fonction économique : Max $35x_1 + 45x_2 + 42x_3$

Contraintes :

$x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}5x_3 \leq 240$ (Découpage) ← 2 machines

$0{,}5x_1 + x_3 \leq 120$ (Emboutissage) ← 1 seule

$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 240$ (Polissage) ← 2 machines

3 pt

D'où le modèle sera :

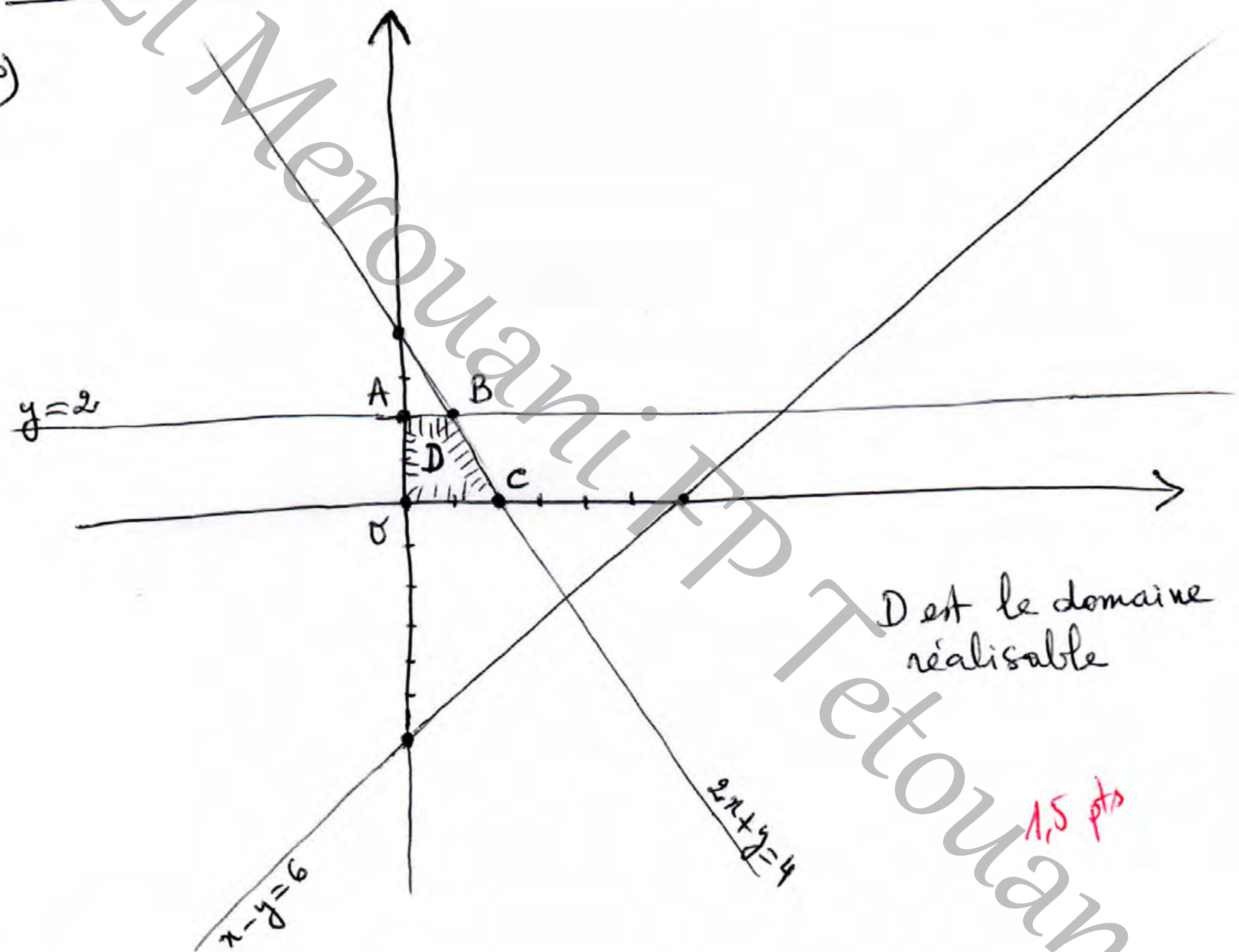
$$\text{Max } 35x_1 + 45x_2 + 42x_3$$

Sujet à
$$\begin{cases} x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}5x_3 \leq 240 \\ 0{,}5x_1 + x_3 \leq 120 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 240 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1 pt

Problème n° 2 :

1°)



D est le domaine réalisable

1,5 pts

- $x - y = 6$: $x = 0 \Rightarrow y = -6$; $y = 0 \Rightarrow x = 6$
- $2x + y = 4$: $x = 0 \Rightarrow y = 4$; $y = 0 \Rightarrow x = 2$

$y = 2$

2°) les points extrêmes sont O, A, B et C de coordonnées :

* $O(0,0)$
* $A(0,2)$
* $B(x,y)$? $\begin{cases} 2x+y=4 \\ y=2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

$B(1,2)$

2 pts

* $C(2,0)$

3°) $\lambda = 2 \Rightarrow Z = 2x + 7y$

* $Z_O = 0$
* $Z_A = 14$
* $Z_B = 2 + 14 = 16$
* $Z_C = 4$

1 pts

D'où, la solution optimale est $B(1,2)$ et la valeur optimale est 16.

4°) $\lambda = 12 \Rightarrow Z = 12x + 7y$

* $Z_O = 0$
* $Z_A = 14$
* $Z_B = 12 + 14 = 2\cancel{8}6$
* $Z_C = 24$

1 pts

[redacted] D'où, la solution optimale est $B(1,2)$ c'est la même que pour $\lambda = 2$. Mais, avec une valeur optimale plus grande 28.

5°) $Z = \lambda x + 7y$

$Z_0 = 0$

$Z_A = 14$

$Z_B = \lambda + 14$

$Z_C = 2\lambda$

1,5 pts

Pour que le point B reste solution optimale (max.) du problème, il faut que $\lambda + 14 \geqslant 2\lambda$

c'est-à-dire $0 \leq \lambda \leq 14$

Problème n°3 :

1°) La méthode duale du simplexe :

D'abord, on donne la forme standard du problème

$$\text{Min } 3x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 = 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \\ x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

Par la méthode duale du simplexe, on multiplie les deux contraintes par (-1), on obtient :

$$\text{Min } 3x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{Sujet à } \begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_4 = -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = -6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

V.b.	x_1	x_2 (V.e.)	x_3	x_4	x_5	$-Z$	T.d.
V.P x_4	-1	$\boxed{-2}$ pivot	0	1	0	0	-8 ←
x_5	-3	2	1	0	1	0	-6
$-Z$	3	1	1	0	0	1	0

V.b.	x_1 (V.e)	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$	T.d.
x_2	$1/2$	1	0	$-1/2$	0	0	4
V.P x_5	$\boxed{-4}$ pivot	0	1	1	1	0	-14 ←
$-Z$	$\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	-4

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	$1/8$	$-3/8$	$1/8$	0	$9/4$
x_1	1	0	$-1/4$	$-1/4$	$-1/4$	0	$7/2$
$-Z$	0	0	$13/8$	$9/8$	$5/8$	1	$-51/4$

Par la méthode duale du simplexe, on est à l'optimum, car les termes de droite sont tous non-négatifs

solution optimale $x_1 = \frac{7}{2}$ $x_2 = \frac{9}{4}$ et $x_3 = 0$

$x_4 = x_5 = 0$ (V.H.B)

La valeur optimale est $Z = -\frac{51}{4}$.

2°) Soit $\delta > 0$, que l'on introduit dans le tableau opt.

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	1/8	-3/8	1/8	0	9/4
x_1	1	0	-1/4	-1/4	-1/4	0	7/2
$-Z$	0	δ	$\frac{13}{8}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{5}{8}$	1	$-\frac{51}{4}$

Ce tableau n'est pas dans la forme canonique à cause de ce δ ;

V.b.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-Z$	T.d.
x_2	0	1	1/8	-3/8	1/8	0	9/4
x_1	1	0	-1/4	-1/4	-1/4	0	7/2
$-Z$	0	0	$\frac{13-\delta}{8}$	$\frac{9}{5}+\frac{3\delta}{8}$	$\frac{5-\delta}{8}$	1	$\frac{-51-9\delta}{4}$

Pour que ce tableau reste optimale, il faut que :

$$\begin{cases} \frac{13-\delta}{8} \geq 0 \\ \frac{5-\delta}{8} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13-\delta \geq 0 \\ 5-\delta \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \leq 13 \\ \delta \leq 5 \end{cases}$$

Donc, on doit avoir $\boxed{0 \leq \delta \leq 5}$