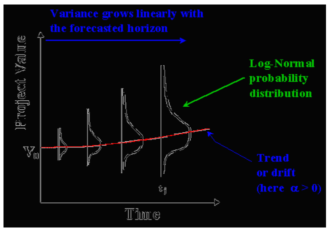
3ème Partie: Plan

- Processus Stochastiques
- Processus de Markov
- Processus de comptage
- Processus de Poisson
- Processus de naissances pur
- Les processus de naissance et de mort
- Files d’attente
- Gestion aléatoire des Stocks

1

Processus Stochastiques:



2

Processus Stochastiques:

- Considérons une expérience aléatoire avec Ω son espace fondamental.
- En associant des valeurs numériques aux éléments de cet espace, on peut définir une famille de variables aléatoires $\{X(t), t \geq 0\}$ indexée par rapport au paramètre temps t.
- Les valeurs que prend le processus s’appellent « les états » et leur ensemble S espace des états.
- L’ensemble T des valeurs possibles de t s’appelle espace de temps, qui peut être discret ou continue.

Mohamed El Merouani 3

Processus Stochastiques:

- Dans le cas discret, on notera le temps par n et on représentera le processus par $\{X_n; n=0,1,2,\ldots\}$
- Lorsqu’on fixe t, X(t) est une variable aléatoire.
- Pour avoir une description complète du processus, il est nécessaire de donner la loi conjointe des variables aléatoires de la famille $\{X(t);\, t \in T\}$.
- Lorsque t est continue, avoir cette loi conjointe est presque impossible.

Mohamed El Merouani 4

Processus Stochastiques:

- Sous ces conditions, on suppose que le comportement du processus s'obtient en l'étudiant dans tout ensemble discret de temps et en définissant une loi conjointe dedans, c'est-à-dire, pour $(t_1, \ldots, t_n)$ avec $t_1<\ldots<t_n$, on donne:
  $$P(X(t_1)\leq x_1,\ldots,X(t_n)\leq x_n)$$
  qui prend sa forme la plus simple si les variables aléatoires sont indépendantes.
- Mais, dans la majorité des cas pratiques, il existe une sorte de dépendance entre ces variables.

Processus Stochastiques:

- Même si on a besoin d'une loi de probabilité conjointe citée précédemment, la plus grande partie de l'information dont on a besoin dans la pratique est tirée des **fonctions de transition** .
- Les fonctions de transition sont des loi de probabilité conditionnelle basées sur une information tirée du processus stochastique relativement à une valeur spécifique du paramètre t.

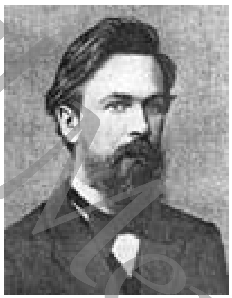
Processus Stochastiques:

- Soient t_0, $t_1\in T$ telles que $t_0\leq t_1$. On définit la fonction de loi de transition conditionnelle par
  $$F(x_0, x_1; t_0, t_1)=P(X(t_1)\leq x_1/X(t_0)\leq x_0)$$
- Si le processus stochastique a des espaces de temps et des états discrets, les probabilités de transition seront:
  $$P_{ij}^{(m,n)} = P\left(X_n = j / X_m = i\right)$$

Processus Stochastiques:

- Un processus stochastique $\{X(t), t\in T\}$ est dit homogène dans le temps si sa fonction de loi de transition ne dépend que des différences t_1-t_0.
- Dans ce cas, $F(x_0, x; t_0, t_0+t)=F(x_0,x;0,t)$ $\forall t_0\in T$.
- Pour simplifier, dans l'expression précédente, on utilise la notation $F(x_0,x;t)$.
- Par analogie, pour le processus discret $\{X_n, n=0,1,2,\ldots\}$ on utilise la notation $P_{ij}^{(n)}$.

Processus de Markov:



Processus de Markov:

- La forme la plus simple de dépendance entre les variables aléatoires d'un processus stochastique est la Markovienne.
- Soient un ensemble d'instants $(t_0,t_1,\ldots,t_n,t)$ avec $t_0<t_1<\ldots<t_n<t$ et t, $t_i \in T$, où T est l'espace de temps. Un processus $\{X(t), t \in T\}$ est dit de Markov si la loi de X(t) conditionnée par les valeurs $X(t_1),\ldots,X(t_n)$ ne dépend que de $X(t_n)$, c'est-à-dire, de la valeur la plus récente,
  $P(X(t)\leq x/X_n(t_n)\leq x_n, X_{n-1}(t_{n-1})\leq x_{n-1},\ldots,X_0(t_0)\leq x_0)=$
  $=P(X(t)\leq x/X_n(t_n)\leq x_n)=F(x_n,x;t_n,t)$

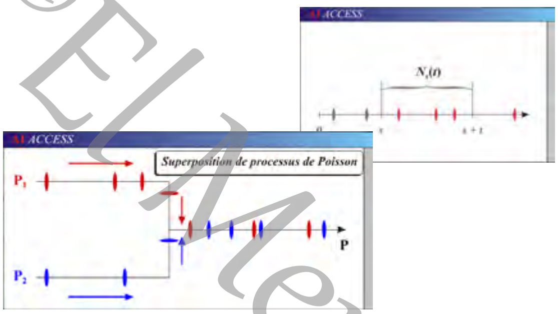
Processus de Markov:

- Si le processus stochastique a un espace d'états et de temps discrets, alors c'est un processus de Markov si,

$$P(X_n=j/X_{n_1}=i_1, X_{n_2}=i_2,\ldots,X_{n_k}=i_k)=$$
$$=P(X_n=j/X_{n_k}=i_k)= P_{ij}^{(n_k,n)}$$

Espace de temps ⇩	Espace des états: Discret	Espace des états: Continue
Discret	Chaîne de Markov à temps discret	Processus de Markov à temps discret
Continue	Chaîne de Markov à temps continue	Processus de Markov à temps continue

Processus de comptage:



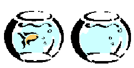
Processus de comptage:

- Un processus de comptage N(t) est un effectif à la date t.
- Par exemple:
  - N(t)=taille d'une population à la date t.
  - N(t)=nombre de navire qui arrivent à un port dans l'intervalle de temps [0,t]

Ces processus sont des processus:

- à temps continu (le temps t varie continûment, $t \in \mathbb{R}$)
- à espace d'états discret (un comptage n est un nombre entier), éventuellement infini.

Processus de Poisson:



Processus de Poisson:

- Le processus de Poisson est le processus de comptage le plus élémentaire utilisé fréquemment pour modéliser les occurrences d'un événement pouvant survenir à tout instant avec une probabilité constante et indépendamment des occurrences passées.
- On note N(t) le nombre d'événements survenus dans l'intervalle [0,t].

Processus de Poisson:

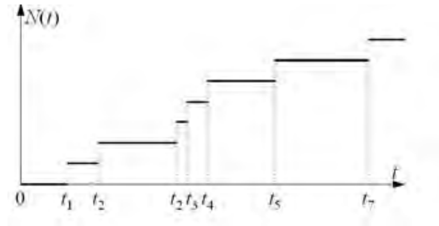
- On dit qu'un processus stochastique est de Poisson s'il vérifie les hypothèses suivantes:

A- le processus est sans mémoire: l'occurrence d'événements avant la date t n'influe en rien sur l'occurrence d'événements après t (donc c'est un processus de Markov)

B- le processus est homogène dans le temps: la loi de probabilité de l'accroissement N(t+h)-N(t) du processus ne dépend que de h et pas de t (et donc la même que celle de N(h)). On parle parfois d'hypothèse d'homogénéité temporelle ou de stationnarité.

Processus de Poisson:

- Un tel processus a une trajectoire en escalier



Processus de Poisson:

- L'événement d'intérêt survient aux dates $t_1, t_2, \ldots, t_5, t_6, \ldots$ à chacune de ces dates, le comptage N(t) augmente de 1:

$N(t)=0$ si $t<t_1$

$N(t)=1$ si $t_1 \le t<t_2$

⋮

$N(t)=k$ si $t_k \le t<t_{k+1}$

etc.

Exemples de Processus de Poisson:

- Appels téléphoniques à un standard,
- Arrivée des clients à un guichet,

Processus de Poisson: Loi de probabilité

- En terme de probabilités, si on considère la probabilité qu'un événement survienne dans un intervalle d'amplitude Δt
  $$P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)$$
  en opérant un développement limité au premier ordre, et en remarquant que
  $$P(N(t)-N(t)=1)=0$$
  on obtient
  $$P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

Processus de Poisson: Loi de probabilité

on obtient

$$P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

où λ est appelée intensité du processus

Les hypothèses A et B impliquent que λ ne dépend pas de t.

la notation $o(\Delta t)$ veut dire que:

$$\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}0$$

Processus de Poisson: Loi de probabilité

- Alors N(t) est un processus de Poisson de paramètre λ, qui vérifie que chaque N(t) suit une loi de probabilité de Poisson de paramètre λt.
  $$P(N(t)=n)=e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!$$
- On peut démontrer alors que les intervalles du temps entre deux événements consécutifs sont des variables aléatoires i.i.d. suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Processus de naissances pur

- Le processus de Poisson adapté au cas de la croissance d'une population pour lequel il semble raisonnable de tenir compte de la taille de la population pour modéliser la fréquence des naissances.
- Il faut bien noter qu'on s'intéresse ici seulement à la naissance de nouveaux individus et non à leur mort et qu'on obtient donc une modélisation nécessairement croissante de la taille de la population.

Les processus de naissance et de mort:

- C'est le cas général dans lequel, on considère l'évolution d'une population qui connaît à la fois des naissances et des morts.

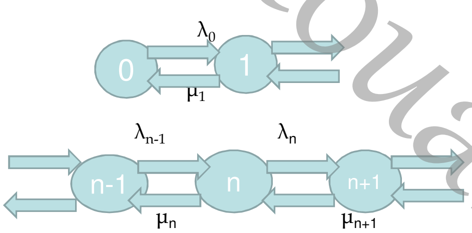
Files d'attente

Files d'attente:

- La population de la file d'attente évolue comme un processus de saut markovien...
- nous nous limitons au cas où il n'y a que des sauts vers deux valeurs voisines :
  – naissance ou arrivée (la population augmente de 1)
  – mort ou départ (la population diminue de 1)

Files d'attente:

λ_n est le taux de naissance (ou d'arrivée) et μ_n le taux de mort (ou de départ).



Files d'attente, exemple simple: La file M/M/1

- Les clients arrivent dans une file à un seul serveur et reçoivent chacun leur tour un service d'une certaine durée
- Si un client trouve le serveur libre, il reçoit immédiatement son service, sinon il attend son tour
- Les clients arrivent un par un selon un processus de Poisson = le temps séparant deux arrivées est une variable exponentielle de paramètre λ.

Files d'attente, exemple simple: La file M/M/1

- La durée du service donné à chaque client est une variable exponentielle de paramètre μ.
- Ces différentes variables aléatoires sont indépendantes dans leur ensemble.
- La capacité de la file d'attente est infinie et la discipline de service est PAPS (FIFO) premier arrivé - premier servi.

Définition des paramètres:

- L'intervalle de temps entre deux arrivées est une loi exponentielle de paramètre λ signifie que l'inter-arrivée est de durée moyenne $1/\lambda$ et donc que le nombre moyen de clients qui arrivent par unité de temps est λ.
- La durée du service est une loi exponentielle de paramètre μ signifie que le service est de durée moyenne $1/\mu$ et donc que le nombre moyen de clients qui sortent par unité de temps est μ quand le serveur est occupé.

Description de la file d'attente:

- Soit N(t) = n >0 le nombre de clients à l'instant t (ils sont en train d'attendre ou d'être servis)
- Le temps qui sépare t de la prochaine arrivée suit une loi exponentielle de paramètre λ ; de même le temps résiduel de service du client en train d'être servi suit une loi exponentielle de paramètre μ.
- propriété d'absence de mémoire du processus de Poisson.

Description de la file d'attente:

- Le prochain événement modifiant la file d'attente survient au bout d'un temps aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda+\mu$
- C'est une arrivée avec la probabilité $\lambda/(\lambda+\mu)$
- C'est un départ avec la probabilité $\mu/(\lambda+\mu)$
- N(t) est un processus de naissance et de mort dans lequel $\lambda_n = \lambda$ et $\mu_n = \mu$ pour tout n

Mohamed El Merouani 33

Comportement asymptotique d'une file d'attente:

- Que se passe-t-il quand t croît...
- Processus de naissance pure : explosion !
- Processus de naissance et de mort : caractérisation difficile...
  - si le processus, partant d'un état donné, a une probabilité non nulle de ne jamais y retourner, il est dit transitoire. La taille de la population tend vers l'infini
  - si le processus, partant d'un état donné, y revient nécessairement au bout d'un temps fini en moyenne, il est dit récurrent positif : il converge en loi vers une situation d'équilibre stationnaire

Mohamed El Merouani 34

Exemples de files d'attente:

- M/M/1 = inter-arrivées et services indépendants et exponentiels, un seul serveur, les autres paramètres étant donnés par défaut
- M/M/k=Les k serveurs sont identiques : si un client arrive et trouve un serveur libre, il l'occupe. Si tous les serveurs sont occupés, il attend.
- M/M/∞=Il n'y a plus d'attente : il y a toujours un serveur disponible.
- M/M/s/s=La capacité est limitée au nombre de serveurs : les clients sont jetés du système si tous les serveurs sont occupés

Mohamed El Merouani 35

Files d'attente: conclusion

- Modélisation réaliste des systèmes... Mais résolution mathématique parfois difficile !
- La file M/M/1 avec ses hypothèses de Markov fournit une évaluation correcte... Et sa résolution est très facile
- Pour des situations trop complexes, les outils de simulation peuvent apporter des informations sur le comportement du système

Mohamed El Merouani 36

Gestion des Stocks

Gestion aléatoire des Stocks:

- La demande d'un bien peut être unique ou répétitive, constante ou variable (dans le cas répétitif), certaine ou aléatoire, discrète ou continue. Les modèles de gestion de stock se construisent selon le type de demande concerné.
- Pour les stocks de fabrication, on considère en général que la demande est certaine. Mais pour les stocks de distribution, la demande est aléatoire.

Gestion aléatoire des Stocks:

- Alors, on modélise le comportement de celle-ci par une loi de probabilité. Pour déterminer cette loi de probabilité, d'abord on détermine est-ce que la loi est discrète ou continue. Après, et à partir des représentations graphiques de la demande, on peut réaliser des tests statistiques pour déterminer la loi qui s'ajuste mieux aux observations.
- Les historiques de la demande et d'autres informations (comme les prévisions des ventes pour les périodes futures) peuvent intervenir dans le choix de la loi de probabilité.

Gestion aléatoire des Stocks:

- Une demande répétitive certaine peut être variable sans que cela entraîne des difficultés au niveau de la gestion des stocks du fait même de la certitude des demandes futures.
- Dans un contexte d'incertitude, la variabilité de la demande se traduit par le changement des paramètres de la loi de probabilité dans le temps.
- Dans un contexte où la demande est très variable d'une période à l'autre, les stocks joueront pleinement leur rôle régulateur. Ils permettent en particulier de compenser la faible flexibilité du facteur travail.

Les déterminants du stock de sécurité:

- On appelle point de commande (noté S_c) le niveau de stock à partir duquel une commande est déclenchée.
- On appelle stock de sécurité (noté S_s) le niveau de stock durant le délai de livraison.
- Nous noterons L le délai de livraison et D_L la demande pendant ce délai.

Mohamed El Merouani 41

- Pour préciser la notion de stock de sécurité, il convient de distinguer deux cas:
- Si les ventes sont différées en cas de rupture, le stock de sécurité S_s est égal S_c-D_L

$$\boxed{S_s=S_c-D_L}$$

- S_s peut donc prendre des valeurs négatives puisque la demande D_L peut être supérieure au point de commande S_c.

Mohamed El Merouani 42

- Cette hypothèse constitue une simplification dans le sens suivant: les ventes sont différées, ce qui implique que les unités correspondantes seront livrées dés réception du lot suivant.
- Par conséquent l'entreprise ne supportera pas le coût de détention de ces unités.
- Lorsque les ventes sont perdues, la demande est modifiée; elle se définit comme une v.a. D'_L présentant les caractéristiques suivantes:

Mohamed El Merouani 43

$$D'_L = \begin{cases} D_L & si \;\; D_L < S_C \\ S_C & si \;\; D_L \geq S_C \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire $D'_L=Min(D_L, S_C)$.

- Le stock de sécurité est alors égal à S_C-D'_L et il est toujours positif ou nul.
- Lorsque la demande et le délai sont aléatoire, alors le coût de rupture lui-même devient aléatoire.

Mohamed El Merouani 44

- Par conséquent, deux éléments essentiels interviennent dans ce type d'analyse; d'une part le coût supporté lorsqu'il y a effectivement une rupture (vente perdue, procédure spéciale de livraison lorsque la vente est différée, etc…) et d'autre part la probabilité qu'un tel événement survienne.

Mohamed El Merouani 45

- Cette probabilité dépend à son tour de deux éléments:
  - la probabilité que la demande dépasse le stock actuel,
  - la probabilité que la demande suivante (ou le lot de production) soit livrée après épuisement du stock actuel.
- L'évaluation de ces différentes probabilités suppose des hypothèses sur les lois suivies par les deux v.a. que sont la demande et le délai (D_L et L).

Mohamed El Merouani 46

- De manière générale, les lois classiques utilisées dans ce domaine se caractérisent par un ou deux paramètres (l'espérance et la variance).
- La variabilité de la demande est classiquement représentée par la variance de la loi de demande ou, ce qui est équivalent par son écart-type.
- Il y a une relation entre stock de sécurité et variance de la loi de demande car en cas de forte variance, des ruptures de stocks sont plus fréquentes.

Mohamed El Merouani 47

- Donc lorsque cette variance est élevée, un stock de sécurité plus important est nécessaire pour limiter le nombre de ruptures.
- De manière schématique, on peut résumer les différents éléments ci-avant en dressant la liste des déterminants du stock de sécurité:
  a) Les coûts de rupture
  b) Les coûts de détention
  c) La variabilité de la demande
  d) La variabilité des délais de livraison.
- En fait a) et b) ne peuvent être dissociés; un coût de rupture n'est pas élevé « en soi » mais simplement comparé au coût de détention (et réciproquement) car la détermination du point de commande résulte essentiellement de la comparaison de ces deux types de coûts.

Mohamed El Merouani 48

Lois de probabilité de la demande:

- Lorsque la demande D et le délai de livraison (ou de production) sont des v.a., alors la demande D_L, les dates et durées de rupture de stocks éventuelles et les coûts de détention deviennent eux-mêmes aléatoires.
- En effet, le niveau des stocks à un instant t quelconque n'est plus connu avec certitude.

- Dans un modèle dit "à point de commande", une rupture peut survenir uniquement pendant le délai de livraison; c'est donc la variable D_L qui importe ici.
- Cependant dans un souci de simplification, nous supposerons que $D_L=D.L$ où L est exprimé en fraction d'année (si l'année est la période de référence).
- Cette hypothèse suppose en fait que la demande est régulière dans le temps et qu'en particulier elle se comporte de la même façon pendant le délai L que pendant le reste de l'année.

- Si le délai L est d'une semaine, cette hypothèse implique que D_L suit la même Loi de probabilité que $D/52$ et que les demandes hebdomadaires sont indépendantes.
- Dans la détermination du point de commande, deux paramètres essentiels interviennent, l'espérance $E(D_L)$ et l'écart-type (ou la variance) $\sigma(D_L)$ (ou $Var(D_L)$).
- La v.a. D_L représentant la demande peut être discrète ou continue.

- Dans le cas discrèt, nous supposons que la variable DL prend N valeurs (N peut éventuellement être infini) $d_1, d_2, \ldots, d_N$.
- Son espérance est:

$$E(D_L) = \sum_{i=1}^{N} d_i \times P(D_L = d_i)$$

- de variance:

$$Var(D_L) = \sum_{i=1}^{N} (d_i - E(D_L))^2 \times P(D_L = d_i)$$

- et de fonction de répartition

$$F(x) = P(D_L \leq x) = \sum_{d_i \leq x} P(D_L = d_i)$$

- Dans le cas continue, la demande D_L possède une densité f.
- Son espérance est:

$$E(D_L)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$$

- de variance:

$$Var(D_L)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E(D_L)\right)^2\cdot f(x)dx$$

- et de fonction de répartition:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- Si D_L est la demande pendant le délai de livraison et S_C le point de commande, l'événement "une rupture de stock se produit" n'est rien d'autre que l'événement $\{D_L>S_C\}$; en conséquence la probabilité de rupture s'écrit: $P(D_L>S_C)=1-F(S_C)$.
- Comme précédemment, si D_L est discrète, on aura: $P(D_L>S_c)=\sum_{d_i>S_C} P(D_L=d_i)$
- Si par contre D_L possède une densité f, l'expression correspondante est:

$$P(D_L>S_c)=\int_{S_c}^{+\infty} f(t)dt$$

- De manière analogue, lorsqu'on cherche à évaluer un coût de rupture moyen (une espérance), il faut connaître le nombre moyen d'unités non livrées et appliquer le coût unitaire de rupture à ce nombre (que nous noterons $E(N_n)$). On alors:

$$E(N_n)=\sum_{d_i>S_C}(d_i-S_c)\times P(D_L=d_i)$$ (dans le cas discret)

$$E(N_n)=\int_{S_C}^{+\infty}(x-S_C)f(x)dx$$ (dans le cas continue)

- On peut noter que N_n joue un rôle différent selon le comportement supposé de la clientèle en cas de rupture.
- Si les ventes sont simplement différées, il s'agit du nombre moyen d'unités qui seront livrées dés réception de la prochaine livraison du fournisseur ou dés la mise à disposition du prochain lot de production.
- Dans le cas où les ventes sont perdues, N_n est le nombre moyen de ventes manquées et la demande peut alors être considérée comme nulle pendant la période de rupture.

Lois usuelles de la demande:

- Les lois de probabilités les plus utilisées dans le domaine de la gestion de stocks sont la loi de Poisson et la loi normale.
- La loi de Poisson est une loi discrète qui présente la particularité d'avoir une espérance et une variance égales à son paramètre λ.
- Cette propriété est utilisée lorsqu'on cherche à tester si une v.a. suit cette loi (on calcule alors la moyenne et la variance d'un échantillon de cette variable pour opérer la comparaison).

- La loi normale est sans doute la plus utilisée des lois continues.
- Dans notre contexte, la modélisation de la demande par une v.a. suivant une loi normale pose cependant un problème (au moins sur le plan théorique); une variable normale, quelles que soient les valeurs de ses paramètres $\overline{x}$ et σ, a une probabilité non nulle de prendre des valeurs négatives.

- En conséquence, on supposera souvent que la demande d'un produit est normale lorsqu'elle porte sur un grand nombre d'unités et qu'elle est répartie symétriquement par rapport à la moyenne.
- Lorsque cette symétrie n'est plus vérifiée, une solution alternative consiste à modéliser la demande par une loi exponentielle négative qui se caractérise par un écart-type égal à l'espérance.

- D'abord, on l'applique pour modéliser la demande, en gestion de stock, lorsque la symétrie n'est pas vérifiée et lorsqu'on remarque que son écart-type est égal à son espérance (sa moyenne).
- Mais en général, la loi exponentielle (négative) s'applique pour modéliser les phénomènes de désintégration. La v.a. X est alors la durée de vie du phénomène.

Autres thèmes:

- Fiabilité des systèmes.
- Contrôle Statistique de la Qualité.
- Séries Chronologiques.
- etc…

Références:

- Abdelmajid Gagou: «Introduction aux probabilités: cours avec exercices corrigés », Impremerie de Fedala, 1ère édition, 1996.
- M. Ellatifi: «Exercices et problèmes résolus de statistiques-1: Probabilités », Afrique Orient, 1984.
- Mustapha Kchirid: « Calcul des probabilités: Exercices corrigés avec rappel de cours », Editions El Badil, 2ème édition, 2002.

Références:

- Ph. Chrétienne et R. Faure: « Processus Stochastiques, leurs graphes; leurs usages », Gauthier-Villars éditeur, 1980.
- P. Roger: « Gestion de Production », Précis Dalloz, 1992.