

T.D. d'Analyse Mathématique II
Série d'exercices sur les fonctions négligeables
et les fonctions équivalentes

I.- Donner les relations de négligeabilité au voisinage de $+\infty$ existant entre les quatre fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{-x}; \quad f_2(x) = e^{-x^2}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f_4(x) = \frac{\text{Log}x}{x^2}.$$

III.- Trouver un équivalent simple de :

$$f(x) = \frac{\text{Log}(1+x)}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{au voisinage de } 1,$$

$$g(x) = \frac{x \text{Log}x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{au voisinage de } +\infty,$$

$$h(x) = e^x - x^2 \text{Log}x + 2 \quad \text{au voisinage de } +\infty,$$

$$k(x) = \frac{e^x + x - \text{Log}(x^2)}{x^2 - 1} \quad \text{au voisinage de } -\infty.$$

VI .- Trouver un équivalent des fonctions suivantes au voisinage de zéro :

1) $f(x) = x \sin x,$

2) $g(x) = tg^2 x,$

3) $h(x) = \frac{(e^x - 1) \sin x}{1 - \cos x}.$

V.- 1) Montrer que si f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, alors : $\text{Log} f$ et $\text{Log} g$ sont aussi équivalentes au voisinage de x_0 .

2) Prouver que $\text{Log}(e^x - 1)$ et $\text{Log} e^x$ sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ et déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \text{Log}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

VI.- Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- 1) A-t-on $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$?
- 2) A-t-on $e^f \sim e^g$ au voisinage de $+\infty$?
- 3) $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$ implique-t-il $e^f \sim e^g$ au voisinage de $+\infty$?
- 4) Quelles conditions doivent vérifier f et g pour que l'on ait $e^f \sim e^g$ au voisinage de $+\infty$?