Solution de l'exercice 1.3 page : 14

1)-

Soit $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x+y+z+t\}$

On a $F\subset \mathbb{R}^4$ (par définition)

$F\neq\emptyset$ car $(0,0,0,0)\in F$

Soient (x,y,z,t) et $(x',y,z',t')\in F$ et $\beta\in\mathbb{R}$

On montre que :

$\alpha(x,y,z,t)+\beta(x'+y'+z'+t')\in F$

$\alpha(x,y,z,t)+\beta(x'+y'+z'+t')=(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha t)+(\beta x', \beta y', \beta z', \beta t')$

$=(\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y ; \alpha z+\beta z ; \alpha t+\beta t)$

On a $\alpha x+\beta x'+\alpha y+\beta y' +\alpha z+\beta z' +\alpha t+\beta t'$

- $A(x,y,z,t)+\beta(x',y',z',t')=0$ car $(x,y,z,t)\in F$ et $(x',y',z',t')\in F$

Donc F est un sous espace vectoriel.

2)-

Soient $(x,y,z,t)\in F \Rightarrow x+y+z+t=0$ $T=-y-z-x$

$(x,y,z,t)=(x,y,z,-x,-y-z)=x(1,0,0-1)+y(0,1,0,-1)+z(0,0,1,-1)$

Donc $\{(1,0,0-1) ; (0,1,0,-1) ; (0,0,1,-1)\}$ est une famille génératrice ;

Montrons qu'elles est libre soient : α_1 ,α_2, tel que :

$\alpha_1(1,0,0-1) +\alpha_2(0,1,0,-1)+\alpha_3(0,0,1,-1) \Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3, -\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_3,) =(0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 =\alpha_2 =\alpha_3=0$

Donc $\{(1,0,0-1) ; (0,1,0,-1) ; (0,0,1,-1)\}$ est libre et par suit elle est une base de F est dimension F =3.