Solution de l'exercice 1.5 page : 17

- On montre que F est un plan vectoriel c.à.d. de dimension deux.

On a Fun sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, donc F est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Soient $(x, y, z) \in F \Rightarrow x+y+z=0$

$\Rightarrow z=-x-y$

Donc $(x, y, z)=(x, y;-x-y)$

$=(x (1, 0,-1) +y (0, 1,-1)$

D'où $e_1= (1, 0,-1)$ et $e_2= (0, 1,-1)$ forment une famille génératrice de F.

On montre que $\{e_1, e_2\}$. est libre

soient a, $a_2 \in \mathbb{R}$.

Tel que a_1- $e_1+a_2 e_2=(0.0.0) \Rightarrow a_1(1,0,-1)+a_2(0,1,-1)=(0,0) \Rightarrow (a_1,a_2,-a_1-a_2)=(0,0,0)$
$\Rightarrow a_1=a_2=0$.

Donc $\{e_1, e_2\}$ est libre et par suite c'est une base de F

D'où dim F=2

$G= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;x+y=2z\}$

G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

On montre que dimG=2

Soit$(x, y, z) \in G \Rightarrow x+y=2z \Rightarrow x=2z-y$

$(x, y, z)= (2z-y, y, z)$

$(x, y, z)=y (-1, 1,0) +z (2, 0,1)$

Donc $\{(-1, 1,0) ;(2, 0,1)\}$ set un système générateur de G.

On montre que c'est système libre ;

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que

$\alpha (-1, 1,0) + \beta (2, 0,1) = (0, 0,0) \Rightarrow \alpha= \beta =0$

Donc $\{(-1, 1,0) ; (2, 0,1)$ est libre par conséquence, c'set une base de G est dim G=2.

$F \cap G= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x+y+z=0 \text{ et } x+y=2z\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/3z=0 \text{ et } x+y+z=0\}$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/z=0 \text{ et } x+y=0\} = \{(x,-x, 0)/x \in \mathbb{R}\} =\{x (1,-1,0)/x \in \mathbb{R}\}$.

Donc $\{(1,-1,0)\}$ est générateur de $F \cap G$ et de plus il est libre.

Car si a $\in \mathbb{R}$ tel que :

a (1,-1,0)=0 $\Rightarrow$ a=0 par suite {(1,-1,0)} est une base de $F \cap G$.

donc dim$F \cap G$=1 (droite vectorielle).

$F \cap H=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x+y+z=0 \text{ et } x=y=z\} = \{((x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x=y=z=0\} = \{(0,0,0)\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on l'appelle le sous-espace vectoriel trivial, par convention, et il est de dimension zéro, par pure convention.

$G \cap H=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x+y=2z \text{ et } x=y=z\}=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/\ x=y=z=1\}$

donc c'est une droite vectorielle de base (1,1,1)

dim $G \cap H$=1