Solution de l'exercice 2.2 page 43

On considère les matrices

1-

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

AB=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

AB=$\begin{pmatrix} -1-2+0 & -5+8-3 & 2-2+0 \\ 0+0+ & 0+0-3 & 0+0+0 \\ 1-1+0 & 5+4-9 & -2-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$= -3$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$= -3.I

BA=$\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$= -3.I

2-on a AB=BA=-3.I

A inversible s'il existe une matrice C d'où AC=CA=I $\quad\quad$ A^{-1}=C

on a AB=BA=-3.I $\quad\rightarrow\quad$ 1/3 AB=-1/3 BA=I

→A(1/3 B)=(-1/3 B)B=I

D'ou A^{-1} =-1/3 B=$\begin{pmatrix} 1/3 & 5/3 & -2/3 \\ 1/3 & -4/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Donc A est inversible

Solution de l'exercice 2.3 page 43

On a A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

On développe suivant la 1^er ligne

det A=$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$=$(-1)^{1+1}$X1$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$+$(-1)^{1+2}$X1$\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$+$(-1)^{1+3}$X1$\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}$=-56-56-(-48+48)+0=-112+96=-16 $\neq$0

det A$\neq$0 donc Aest inversible c à d A^{-1} existe

A^{-1} =$\frac{1}{\det A}$ (com(A))= $\frac{1}{\det A}$ A*

(A* est la matrice adj)

$$\mathrm{Com}(A)=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7 & 8\\ 7 & -8\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6 & 8\\ 6 & -8\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6 & 7\\ 6 & 7\end{vmatrix} \\ (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 7 & -8\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & -8\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 6 & 7\end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 7 & 8\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 6 & 8\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 6 & 7\end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-112 & 96 & 0\\ 15 & -14 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Com}(A)=\begin{pmatrix}-112 & 15 & 1\\ 96 & -14 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\ (\mathrm{com}\ A)=\begin{pmatrix}\frac{112}{16} & -\frac{15}{16} & \frac{-1}{16}\\ \frac{-96}{16} & \frac{14}{16} & \frac{2}{16}\\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{-1}{16}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -\frac{15}{16} & \frac{-1}{16}\\ -6 & \frac{7}{8} & \frac{1}{6}\\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{-1}{16}\end{pmatrix}$$

Pour la matrice B, on a :

$\det B=(-1)^{1+1}X1\begin{vmatrix}7 & 8\\ -7 & 8\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}X1\begin{vmatrix}6 & 8\\ 6 & 8\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}X1\begin{vmatrix}6 & 7\\ 6 & 7\end{vmatrix}=56+56+(-42-42)=112-84=28\neq 0$

Donc $\det B\neq 0\rightarrow$B set inversible $B^{-1}=\frac{1}{\det B}$ (comB)

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & 7 & 8\\ 6 & -7 & 8\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Com}(B)=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7 & 8\\ -7 & 8\end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6 & 8\\ 6 & 8\end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6 & 7\\ 6 & -7\end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -7 & 8\end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 6 & 8\end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 6 & 7\end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 7 & 8\end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 6 & 8\end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Com}(B)=\begin{pmatrix}112 & 0 & -84\\ -15 & 2 & 13\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\quad t(\mathrm{com}(B))=\begin{pmatrix}112 & -15 & -1\\ 0 & 2 & -2\\ -84 & 13 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } B^{-1}=\frac{1}{\det B}\ t(\mathrm{com}B)=\frac{1}{28}\begin{pmatrix}112 & -15 & -1\\ 0 & 2 & -2\\ -84 & 13 & 1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}4 & \frac{-15}{28} & \frac{1}{28}\\ 0 & \frac{1}{14} & \frac{-1}{14}\\ 3 & \frac{13}{28} & \frac{1}{28}\end{pmatrix}$$

Maintenant pour la matrice

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & 7 & 8\\ -6 & 7 & 8\end{pmatrix}$$

$\det C=\begin{vmatrix}7 & 8\\ 7 & 8\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}6 & 8\\ -6 & 8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}6 & 7\\ -6 & 7\end{vmatrix}=-96+84=12$ donc $C\neq 0$ et C^{-1} existe

$C^{-1}=\frac{1}{\det C}$ t (comC)

Com C= $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & 7 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -96 & 84 \\ -1 & 14 & -13 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -96 & 14 & -2 \\ 84 & -13 & 1 \end{pmatrix}$

$C^{-1} = \frac{1}{detC}$ t(comC)= $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 96 & -14 & 2 \\ -84 & 13 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{12} & \frac{-1}{12} \\ 8 & \frac{-7}{6} & \frac{1}{6} \\ -7 & \frac{13}{12} & \frac{-1}{12} \end{pmatrix}$