2.- Fonctions équivalentes :

a.- Définition :

Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage d'un point x_0 ($x_0 \in IR$ ou $x_0 = \pm\infty$). On suppose, de plus, que g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0 où l'on peut avoir $g(x_0)=0$.

On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 si, et seulement si : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

On note cela par $f \underset{x_0}{\sim} g$.

On dit aussi f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 ou en x_0.

b.- Exemple :

1) Au voisinage de zéro, les fonctions $f(x) = Log(x+1)$ et $g(x) = x$ sont équivalentes puisque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Log(x+1)}{x} = 1$.

On note $Log(x+1) \underset{0}{\sim} x$.

2) Toujours, au voisinage de zéro, sin x ~x car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

3) Au voisinage de l'infini, le polynôme $2x^8 + x^7 + x + 1 \underset{+\infty}{\sim} 2x^8$.

4) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + x^2}{e^x} = 1 + \lim\limits_{x \to +} \dfrac{x^2}{e^x} = 1 + 0 = 1$,

d'où $e^x + x^2 \underset{+\infty}{\sim} e^x$.

c.- Remarque :

Là encore, cette notion n'est valable qu'au voisinage d'un certain point. Pour reprendre, l'exemple précédent où on avait $e^x + x^2 \sim e^x$ au voisinage de $+\infty$, on plus cela au voisinage de 1, par exemple, car $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x + x^2}{e^x} = \dfrac{e+1}{e} \neq 1$.

d.- Théorème :

La relation $\underset{x_0}{\sim}$, « équivalence de deux fonctions au voisinage de x_0», est une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de x_0.

Pr. Mohamed El Merouani

Démonstration :

Réflexivité : $f \underset{x_0}{\sim} f$

Symétrie : $f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow g \underset{x_0}{\sim} f$

Transitivité : $f \underset{x_0}{\sim} g$ i.e. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

et $g \underset{x_0}{\sim} h$ i.e. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{h(x)} = 1$

Alors $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\times\frac{g(x)}{h(x)}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}$$

$= 1\text{x}1 = 1$

D'où $f \underset{x_0}{\sim} h$

e- Remarque :

Dans la définition et le théorème précèdent, on a supposé qu'il existe un voisinage de x_0, tel que *f* et *g* ne s'annulent pas dans ce voisinage sauf peut-être en x_0.

f.-Proposition :

Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$

Démonstration :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0 \Rightarrow f \underset{x_0}{\sim} \ell \\ \\ f \underset{x_0}{\sim} g \end{array}\right\} \Rightarrow g \underset{x_0}{\sim} \ell$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$$

Donc :

Pour chercher la limite d'une fonction *f*, on peut remplacer *f* par une fonction équivalente.

Proposition :

$$\left.\begin{array}{l} f \underset{0}{\sim} f_1 \\ \text{et} \\ g \underset{0}{\sim} g_1 \end{array}\right\} \Rightarrow f g \underset{0}{\sim} f_1 g_1 \text{ et } \frac{f}{g} \underset{0}{\sim} \frac{f_1}{g_1}$$

Exemple :

1) $\boxed{\sin x \underset{0}{\sim} x}$, $\boxed{\cos x \underset{0}{\sim} x}$ $\Bigg\} \Rightarrow \boxed{\text{tg}\, x \underset{0}{\sim} x}$

2) $1-\cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$

$$\sin\frac{x}{2} \underset{0}{\sim} \frac{x}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{x}{2} \underset{0}{\sim} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow 2\sin^2\frac{x}{2} \underset{0}{\sim} 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

D'où $1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

Remarque :

Si $f \underset{0}{\sim} f_1$ et $g \underset{0}{\sim} g_1$, on n'a pas un général $f+g \underset{0}{\sim} f_1+g_1$

En effet ;

On a : $x^2+x^3 \underset{0}{\sim} x^2+x^4$

et $-x^2 \underset{0}{\sim} -x^2$

Mais $(x^2+x^3)-x^2=x^3$ n'est pas équivalente à $(x^2+x^4)-x^2=x^4$ au voisinage de 0.

II.- Développement limités :

1) Formule de Taylor-Young :

* Soit f une fonction dérivable en un point x_0, alors f peut-être approché dans un voisinage de x_0 par un polynôme de degré 1. En effet,

f dérivable en $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

Si on pose $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=\varepsilon(x)$, alors $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$

Donc $f(x)=f(x_0)+\dfrac{(x-x_0)}{1!}f(x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.

*Si, on applique un raisonnement analogue pour la dérivée seconde, on obtiendra :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + (x-x_0)^2 \varepsilon(x) \text{ , avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 .$$

alors *f* peut-être approché dans un voisinage de x_0 par un polynôme de degré 2.

*et avec la dérivée troisième, on aura :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + (x-x_0)^3 \varepsilon(x) \text{ , avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

alors *f* peut-être approché dans un voisinage de x_0 par un polynôme de degré 3.

………

*et si on continue ainsi, jusqu'à la dérivée n$^{\text{ème}}$, on arrive à écrire :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x)^n \varepsilon(x_0),$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

alors *f* peut-être approché dans un voisinage de x_0 par un polynôme de degré n

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle] a, b [de IR et soit $x_0 \in]a,b[$.

Pour tout n$\in$ IN , il existe une fonction ε définie sur]a, b [telle que $\forall$ n$\in$ IN .

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Et bien sur, $f^{(n)}$ désigne la dérivée n$^{\text{ème}}$ de f.

- Pour $x_0 = 0$, la formule précédente devient :

$$\forall x \in]a,b[, f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} + f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x) \text{ , avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Remarque :

Le dernier terme $x^n\varepsilon(x)$ de cette formule est négligeable devant x^n au voisinage de 0 car $\lim_{x\to 0}\frac{x^n\varepsilon(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

C'est-à-dire : $x^n\varepsilon(x)=o(x^n)$.

On peut donc encore écrire :

$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+...+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+o(x^n)$, au voisinage de zéro.

Cette dernière formule qui nous servira le plus dans la suite s'appelle **formule de Taylor-Young.**