2) Définition du développement limité d'ordre n au voisinage de zéro :

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0, sauf peut-être en 0.

On dit que f admet un développement limité (D.L.en abrégé) d'ordre n au voisinage de 0 , s'il existe un intervalle ouvert I de centre 0 et des constantes $a_0, a_1, \dots a_n$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

$$f(0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + n x^{n-1} \varepsilon(x)$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\times 2 a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + n(n-1)^{n-2} x \varepsilon(x)$$

$$f''(0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

H.R $\qquad a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Et on le démontre pour $a_{n+1} = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$ d'où la remarque.

Pour tout $x \neq 0$ appartenant à I :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Où ε est une fonction définie dans I , telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

On écrit aussi $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + 0(x^n)$

Le polynôme $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ est appelé « partie régulière » du D.L et $x^n \varepsilon(x) = 0(x^n)$ le reste du D.L.

Théorème d'unicité :

Si f admet un D.L. d'ordre n au voisinage de 0, ce D.L. est unique.

Dém : « exercice facile »

Remarque : Pour Trouver le D.L d'ordre n des fonctions usuelles au voisinage de 0 on utilise la formule de Taylor-Young en 0.

Exemple :

a) Fonctions exponentielles :

Le D.L d'ordre n au voisinage de 0 de la fonction exp est :

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^2}{n!} + 0(x^n)$ Au voisinage de 0.

Dém : On applique la formule de Taylor-Young à $f(x) = e^x$ qui est de classe C^∞ de $\Re$ vers $\Re$

Et on a $f'(x) = f''(x) = ... = f^{(n)}(x) = e^x$

Donc : $f(0) = f'(0) = f''(0) = ... = f^{(n)}(0) = 1$

Et on trouve $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n)$ au voisinage de 0.

Conséquence :

On déduit immédiatement pour a $\succ 0$

$a^x = e^{x\log a} = 1 + \frac{x\log a}{1!} + \frac{(x\log a)^2}{2!} + ... + \frac{(x\log a)^n}{n!} + 0(x^n)$ au voisinage de 0 (D.L.d'ordre n)

b) Fonction puissance :

Le D.L. d'ordre n au voisinage de 0 de $f(x) = (1+x)^\alpha$ sur]-1,+∞[pour tout $\alpha \in \Re$ est :

$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n)$

Dém : $f(x) = \alpha(1+x)^\alpha$ est de classe C^∞ de]-1,+∞[vers $\Re$

Et on a : $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}; f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$

………… : $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)....(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$

Donc : $f(0) = 1; f'(0) = \alpha; f''(0) = \alpha(\alpha-1);....; f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))$

Et la formule de Taylor-Young en 0 donne :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{x}{1!}\alpha + \frac{x^2}{2!}\alpha(\alpha-1) + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + 0(x^n)$$

au voisinage de 0

Cas particuliers de la formule précédente :

- $\alpha = -1$ donne

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=1-x+\frac{(-1)(-2)}{2!}x^2+...+\frac{(-1)(-1-1)...(-1-n+)x^n}{n!}+0(x^n)$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+...+(-1)^n x^n+0(x^n) \text{ au voisinage de O .}}$$

- $\alpha=-1$ et la substitution de x par –x donnent $(1+x)^{-1}=1+\frac{(-1)(-2)}{2!}(-x)^2+....+\frac{(-1)(-1-1)...(-1-n+1)}{n!}(-x)^n+0(x^n)$

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+0(x^n) \text{ au voisinage de 0.}$$

- $\alpha=\frac{1}{2}$ donne

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2!}+(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+0(x^n)$$

Pour calculer commodément le coefficient général d'ordre n, on multiple chacun des facteurs qui le composent par 2 ; on obtient

$$\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}=\frac{2\alpha(2\alpha-2)...(2\alpha-2n+2)}{2^n\times n!} \qquad (1)$$

On remplace 2α par 1, on obtient

$$\frac{1(-1)(-3)...(3-2n)}{2\times4\times6\times...\times2n}=(-1)^{n-1}\frac{1\times1\times3\times...\times(2n-3)}{2\times4\times6\times...\times2n}$$

Par conséquent,

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1\times1}{2\times4}x^2+\frac{1\times1\times3}{2\times4\times6}x^3-...+(-1)^{n-1}\frac{1\times1\times3\times..\times(2n-3)}{2\times4\times6\times..\times2n}x^n+0(x^n) \text{ au voisinage de 0.}$$

- $\alpha=-\frac{1}{2}$ En remplaçant, dans (1), 2α par -1, on obtient :

$$\frac{(-1)(-3)(-5)...(1-2n)}{2\times4\times6\times...\times2n}=(-1)\frac{1\times3\times5\times...\times(2n-1)}{2\times4\times6\times...\times2n}$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\times3}{2\times4}x^2-....+(-1)^n\frac{1\times3\times5\times...\times(2n-1)}{2\times4\times6\times...\times2n}x^n+0(x^n) \text{ au voisinage de 0.}$$