Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté polydisciplinaire
Tétouan

Année universitaire : 2006-2007
L.F. Sc. Eco & Gestion (**S₂**)
Module : Méthodes Quantitatives I

Contrôle Continu de Maths I

Durée 1 heure

Problème nº 1 :

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{2-\sqrt{4+x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$$

Où a est un paramètre réel.

1) Pour quelle(s) valeur(s) de a, f est continue en 0 ?
2) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Problème nº 2 :

Soit (V_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme V_1.
Soit (U_n) une suite numérique définie par :

$U_n = e^{V_n}$ Pour tout n entier naturel non nul

(où e^{V_n} désigne l'exponentielle népérienne de V_n).

1) Vérifier que (U_n) est une suite géométrique dont il faudra préciser les caractéristiques, c'est-à-dire son premier terme U_1 et sa raison q, en fonction de V_1 et r.
2) Donner la somme $S_n = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ en fonction de V_1, r et n.
3) Préciser les valeurs de r pour lesquelles la somme S_n admet une limite quand n tend vers $+\infty$.

Problème n°1 :

1. f continue en 0 $\Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = a$

$$f(x) = \frac{x^2}{2-\sqrt{4+x^2}} = \frac{x^2\left(2+\sqrt{4+x^2}\right)}{-x^2} = -\left(2+\sqrt{4+x^2}\right)$$

D'où $\lim_{x\to 0} f(x) = -4$

Donc f est continue en 0 $\Leftrightarrow f(0) = -4$

$\Leftrightarrow a = -4$

2. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = ?$

$$f(x) = \frac{x^2}{2-\sqrt{4+x^2}} = \frac{x^2}{2-\sqrt{x^2\left(\frac{4}{x^2}+1\right)}} = \frac{x^2}{2-|x|\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}$$

D'où $\forall x \in \left]-\infty, 0\right[;\quad |x| = -x$

$$f(x) = \frac{x^2}{2+x\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = \frac{x}{\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}}$$

et $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{4}{x^2}+1}} = -\infty$

Problème n°2 :

1) $U_n = e^{V_n}$

$U_{n+1} = e^{V_{n+1}} = e^{V_n + r} = e^{V_n} \cdot e^r$

$U_{n+1} = U_n \cdot e^r \qquad \forall n \in IN^*$

D'où (U_n) est une suite géométrique de raison $q = e^r$ et de premier terme $U_1 = e^{V_1}$

2) D'après le cours $\qquad S_n = U_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} \qquad$ si $\qquad q \neq 1$

$$\boxed{S_n = e^{V_1} \frac{1-\left(e^r\right)^n}{1-e^r}} \qquad \text{si} \qquad r \neq 0$$

Si $\quad r = 0 \quad$ alors

$S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = e^{V_1} + e^{V_1} + \cdots + e^{V_1} = ne^{V_1}$

Limite de S_n quand $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to +\infty} S_n = e^{V_1} \lim_{n\to +\infty} \frac{1-\left(e^r\right)^n}{1-e^r}$$

Or $\left(e^{r}\right)^{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 \quad si \quad r=0 \\ +\infty \quad si \quad r>0 \\ 0 \quad si \quad r<0 \end{cases}$

Alors :

Si $r=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} ne^{V_1} = +\infty$

Si $r>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{e^{V_1}}{1-e^{r}} \cdot (-\infty) = +\infty$

Si $r<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = e^{V_1} \cdot \dfrac{1}{1-e^{r}} = \dfrac{e^{V_1}}{1-e^{r}}$

Conclusion :

S_n admet une limite quand $n \to +\infty$ pour $r<0$ et dans ce cas on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e^{V_1}}{1-e^{r}}}$$

3) $V_1 = 0$ et $r=-1$

$U_n = e^{V_n} = e^{\left(V_1+(n-1)r\right)}$

$= e^{V_1}\left(e^{r}\right)^{(n-1)}$

$= e^{0} \cdot \left(e^{-1}\right)^{(n-1)} = e^{1-n}$

Dans ce cas : $r=-1<0$

$$S_n = e^{V_1}\,\frac{1-\left(e^{r}\right)^{n}}{1-e^{r}}$$

Donc $\boxed{S_n = \dfrac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-e^{-1}}$ (car $e^{-n} = \dfrac{1}{e^{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$).