Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
Tétouan

Année Universitaire 2006/2007
Filière : Sc. Éco. & Gestion(S2)
Module : Méth. Quantita. 1

Contrôle final de Mathématiques I
(Durée 2 heures)

Exercice :

Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

$$I = \int \frac{x+1}{x^3 + x^2 - 2x} dx \quad ; \qquad J = \int \frac{x^6 + x^5 + 1}{1-x} dx$$

Problème n° 1:

Pour tout entier naturel *n*, on pose

$$U_n = \int_n^{n+1} (x+1)e^{-x}\, dx$$

1. Montrer l'existence de la suite $(U_n)_{n\in IN}$.
2. Á l'aide d'une intégration par parties, calculer U_n en fonction de *n*.
3. Étudier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in IN}$.
4. Pour tout entier naturel *n*, on pose

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i$$

   a. Calculer S_n en fonction de *n*.

   b. Déterminer la limite de S_n quand *n* tend vers +∞.

Problème n° 2:

1. Soit la fonction numérique suivante : $f(x) = x^2 - 1 + Log\, x$.

Déterminer le tableau de variation de la fonction *f* et préciser la ou les valeurs de *x* telle(s) que *f(x)=0*.

2. Étudier et représenter graphiquement la fonction *g* définie par : $g(x) = x - \frac{Log\, x}{x}$.

Correction du contrôle final (2006-2007)

Exercice :

Intégration des fractions rationnelles :

1) Calcul de $\int \frac{x+1}{x(x+1)(x+2)}dx$

$x(x-1)(x+2) = (x^2 - x)(x+2)$

$\quad = x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x$

$\boxed{Q(x) = x^3 + x^2 - 2x}$

$Q(x) = x(x^2 + x - 2)$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2; \qquad x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$

La décomposition de la fraction rationnelle proposée est de type $\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$

Multiplions les deux membres par x et remplaçons ensuite x par 0 ; on obtient $a = -\frac{1}{2}$

Multiplions les deux membres par x-1 et remplaçons ensuite x par 1 ; on obtient $b = \frac{2}{3}$

Enfin, multiplions les deux membres par x+2 et remplaçons ensuite x par -2, on obtient $c = -\frac{1}{6}$

Alors, la décomposition est entièrement déterminée.
Passons, donc, au calcul de la primitive :

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$\boxed{I = -\frac{1}{2}Log|x| + \frac{2}{3}Log|x-1| - \frac{1}{6}Log|x+2| + C}$$

2) Calcul de $J = \int \frac{x^6 + x^5 + 1}{1-x}dx$

$P(x) = x^5 Q(x) + 1$

$$J = \int \frac{x^6 + x^5(1-x)}{1-x}dx$$

$$J = \int \frac{dx}{1-x} + \int x^5 dx$$

$$\boxed{J = -Log|1-x| + \frac{x^6}{6} + C}$$

Problème n°1 :

1) **Existence de la suite $(U_n)_{n\in IN}$:**

Toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable. La fonction $x \mapsto (x+1)e^{-x}$ étant le produit de deux fonctions continues sur $[n, n+1]$et intégrable sur cet intervalle.

2) Calcul de U_n :

$$U_n = \int_n^{n+1} (x+1)e^{-x}dx$$

Par parties, on pose :

$u(x) = x+1;$ $\qquad$ $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x},$ $\qquad$ $v(x) = -e^{-x}$

$$U_n = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} e^{-x}dx$$

$$U_n = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_n^{n+1} - \left[e^{-x}\right]_n^{n+1}$$

$$U_n = -(n+2)e^{-(n+1)} - (n+1)e^{-n} - e^{-(n+1)} + e^{-n}$$

$$U_n = -(n+3)e^{-(n+1)} + (n+2)e^{-n} = e^{-n}\left[-(n+3)e^{-1} + (n+2)\right]$$

$$\boxed{U_n = e^{-n}\left[n\left(1-\frac{1}{e}\right) + 2 - \frac{3}{e}\right]}$$

3) Convergence de $(U_n)_{n\in IN}$:

Quand n tend vers +∞ ; e^{-n} tend vers 0 et aussi $ne^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

4) Calcul de $S_n = \sum_{i=0}^{n} \int_i^{i+1} (x+1)e^{-x}dx$

$$= \int_0^{n+1} (x+1)e^{-x}dx$$

Donc : $S_n = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^{n+1} - \left[e^{-x}\right]_0^{n+1}$

$S_n = \left[-(n+2)e^{-(n+1)} + 1\right] - \left[e^{-(n+1)} - 1\right]$

$$\boxed{S_n = -(n+3)e^{-(n+1)} + 2}$$

On peut écrire $(n+3)e^{-(n+1)} = (n+3)e^{-n} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e}\left[\frac{n}{e^n} + \frac{3}{e^n}\right]$

Quand n tend vers +∞, $\frac{n}{e^n}$ tend vers 0, de même que $\frac{3}{e^n}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2}$

Problème n°2 :

1) $f(x) = x^2 - 1 + Log\, x$

f est définie pour x>0 $\Rightarrow D_f =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

f est continue et dérivable sur D_f car c'est la somme des fonctions continues et dérivables sur D_f.

Sa dérivée est $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$		$+$	
f	$-\infty$		0		$+\infty$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

2) $g(x) = x - \frac{Log\, x}{x}$

$D_g = IR_+^* =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to 0+} g(x) = +\infty \Rightarrow Oy$ asymptote

$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty \Rightarrow$ étude des branches paraboliques ou des asymptotes obliques.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x) - x = 0 \Rightarrow y = x$ asymptote oblique

g est continue et dérivable sur D_g car c'est la somme (et le produit) des fonctions continues et dérivables sur D_g.

Sa dérivée $g'(x) = 1 - \frac{1 - Log\, x}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2} \Rightarrow g'(x)$ est de signe de $f(x)$.

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$-\infty$		1		$+\infty$