Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année universitaire : 2009-2010
Filière : Sc. éco. & Gestion
$2^{\text{ème}}$ Semestre

T.D. d'Analyse Mathématique II

Série d'exercices sur les développements limités

Exercice 1 :

Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(x)=\frac{1}{x}\left(e^x-\sqrt{1-x}\right)$ et calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 2 :

Soit $f(x)=(1+x)^x$.
Donner le développement limité à l'ordre 2 de $f(x)$ au voisinage de 0.

Exercice 3 :

Soit f l'application définie sur IR par : $f(x)=\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1. Préciser le domaine de définition D_f de f.
2. Donner le développement limité à l'ordre développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de e^x.
3. En déduire le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de Log($f(x)$) puis celui de $f(x)$.
4. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 4 :

On considère l'application $f: x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de continuité de f.
2. Soit g l'application définie par : $g(x)=\begin{cases} f(x) & si\ x\in IR^* \\ \alpha & si\ x=0 \quad (\alpha\in IR)\end{cases}$.

a. Déterminer α de façon que g soit continue de IR dans IR.
b. Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une h. Peut-on appliquer cette formule à $h(x)=e^x$?
c. Calculer la limite pour $x \to 0$ de $\frac{g(x)-g(0)}{x}$.
d. La fonction g est-elle dérivable pour x=0 ?

Exercice 5 :

1. Rappeler développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x)=e^x$ et $g(x)=\text{Log}(1+x)$.
2. Soit $h(x)=\text{Log}(1+e^x)$.

a. Calculer la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0.

b. Poser $u = \frac{1}{2}\left(e^x - 1\right)$ et déduire de 1°) le développement limité à l'ordre 2 de $h(x)$ au voisinage de 0.

Exercice 6 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$.

1. Donner le domaine de définition de f et calculer $f'(x)$.
2. Donner développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 1.
3. En déduire $\lim_{x \to 1} f(x)$