Corrigés des exercices (TD) dont l'enoncé se trouve dans le livre Analyse Mathématique (Tome 1), Mohamed El Merouani, pages 121 jusqu'à 125

Exercice 1:

Une suite arithmétique a 10 termes. Le $4^{\text{ème}}$ terme est 20. Le $9^{\text{ème}}$ terme est 80. Calculer la raison de cette suite, son 1^{er} terme et la somme de ses termes.

Solution : soit (U_n) cette suite ; on a :

$$\left.\begin{array}{l} U_1 \\ U_2 = U_1 + r \\ U_3 = U_1 + 2r \\ U_4 = U_1 + 3r = 20 \\ \vdots \\ U_9 = U_1 + 8r = 80 \\ U_{10} = U_1 + 9r \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} U_1 + 3r = 20 \\ U_1 + 8r = 80 \end{cases}$$

système à 2 équations et à 2 inconnues r et U_1

donc $U_1 = 20 - 3r$

d'où $20 - 3r + 8r = 80 \Rightarrow 5r = 60 \Rightarrow \boxed{r = \frac{60}{5} = 12}$

et $\boxed{U_1 = 20 - 3r = 20 - 3\times 12 = 20 - 36 = -16}$

on a : $S_n = \dfrac{n(U_1 + U_n)}{2}$

pour $n = 10$

$U_{10} = -16 + 9\times 12 = 108 - 16 = 92$

$S_{10} = \dfrac{10(-16+92)}{2} = 5\times 76 = 380$

ou encore :

$S_n = nU_1 + \dfrac{n(n-1)}{2} r$

$S_{10} = 10\times(-16) + \dfrac{10\times 9}{2}\times(+12)$

$S_{10} = -160 + 45\times(+12) = \boxed{380}$

Exercice 2:

Ex :

Calculer la somme de nombres formés de deux chiffres

↳ $10 + 11 + \dots + 98 + 99$

Solution :

Il s'agit de nombres de format "deux chiffres" c'est-à-dire la suite de nombres de 10 à 99.

Ces nombres forment une progression arithmétique de raison 1 et ils sont au nombre de 90 ;

On applique la formule $S_n = \dfrac{n(U_n + U_1)}{2}$

avec $n = 90$ $\quad U_1 = 10$ $\quad U_n = 99$

donc $S_{90} = \dfrac{90(99 + 10)}{2} = 4905$

Exercice 3:

On considère une progression arithmétique telle que la somme des 5 premiers termes soit égale à 100 et que le premier terme soit égal au triple du cinquième terme.

1) Calculer la raison et les 5 premiers termes de cette progression.

2) Déterminer le rang du terme qui est égal à -70, c'est-à-dire calculer n tel que $U_n = -70$.

3) Calculer la somme des n premiers termes sachant que $U_n = -70$.

Solution : Soit (U_n) cette progression, on a : si U_1 est le 1er terme

$$\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = 100 \\ U_1 = 3U_5 \end{cases}$$

1) Soit r la raison de (U_n) donc on a :

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = 100$$
$$\Longrightarrow U_1 + (U_1+r) + (U_1+2r) + (U_1+3r) + (U_1+4r) = 100$$
$$\Longrightarrow 5U_1 + 10r = 100 \Longrightarrow \boxed{U_1 + 2r = \frac{100}{5} = 20}$$

1ère équation

et on a : $U_1 = 3U_5 \Rightarrow U_1 = 3(U_1 + 4r)$

$$\Rightarrow U_1 = 3U_1 + 12r$$

$$\Rightarrow -2U_1 = 12r$$

$$\Rightarrow \boxed{U_1 = -6r}$$

2ème équation

d'où $-6r + 2r = -4r = 20 \Rightarrow \boxed{r = -5}$

Calcul de U_1, U_2, U_3, U_4 et U_5 :

$U_1 = (-6)\times(-5) = 30$; $U_2 = U_1 + r = 30 - 5 = 25$

$U_3 = U_2 + r = 25 - 5 = 20$; $U_4 = U_3 + r = 20 - 5 = 15$

et $U_5 = U_4 + r = 15 - 5 = 10$.

2) $U_n = -70 \iff U_n = U_1 + (n-1)r = -70$

$$\iff 30 - 5(n-1) = -70$$

$$\iff 30 - 5n + 5 = -70$$

$$\Rightarrow -5n = -70 - 30 - 5 = -105$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{105}{5} = 21}$$

3) En général : $S_n = \dfrac{n(U_1 + U_n)}{2}$

Si $n = 21$ alors $S_{21} = \dfrac{21(U_1 + U_{21})}{2} = \dfrac{21}{2}(30 - 70)$

$$\boxed{S_{21} = \frac{21}{2}(-40) = -21 \times 20 = -420}$$

Exercice 4:

Déterminer la raison d d'une progression ~~géométrique~~ dont les trois premiers termes sont liés par la relation

$U_3 = U_1 + U_2$

Solution :

On a : $U_2 = U_1 d$ et $U_3 = U_2 d = U_1 d^2$

Mais $U_3 = U_1 + U_2$ ce qui entraîne que $U_3 - U_1 - U_2 = 0$

ou encore $U_1 d^2 - U_1 - U_1 d = 0$

$\Longrightarrow U_1 (d^2 - d - 1) = 0$

on suppose que $U_1 \neq 0$, alors $d^2 - d - 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 (1) (-1) = 5$

donc $\boxed{d = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$

Exercice 5:

1) Soient $V_1, V_2, \dots, V_m$ les m premiers termes d'une progression arithmétique de raison t. Donner l'expression du $m^{\text{ième}}$ terme V_m de cette progression, en fonction de α, t et m (on pose $V_1 = \alpha$).

2) Soit une suite de nombres définis comme suit:

$$u_i = e^{V_i} \quad , \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Vérifier que les nombres u_i forment une suite géométrique dont il faudra préciser les caractéristiques, c'est-à-dire le premier terme et la raison d, en fonction de α et t.

3) Donner la somme $S_m = u_1 + u_2 + \dots + u_m$ en fonction de α, t et m. Préciser les valeurs de t pour lesquelles la somme admet une limite quand m tend vers $+\infty$.

4) Prenons $\alpha = 0$ et $t = -1$; calculer alors le $m^{\text{ème}}$ terme u_m et la somme S_m, en fonction de m, ainsi que la limite de S_m quand $m \to +\infty$.

Solution:

1) on a: $V_1 = \alpha$

$$V_2 = V_1 + t = \alpha + t$$

$$V_3 = V_2 + t = \alpha + t + t = \alpha + 2t$$

$\vdots$

donc $\boxed{V_m = \alpha + (m-1)t}$

2) Soit

$$u_1 = e^{V_1} = e^{\alpha}$$

$$u_2 = e^{V_2} = e^{\alpha + t} = e^{\alpha} \cdot (e^{t})$$

$$u_3 = e^{V_3} = e^{\alpha + 2t} = e^{\alpha} \cdot e^{2t} = e^{\alpha} \cdot (e^{t})^2$$

$\vdots$

$$u_{m-1} = e^{V_{m-1}} = e^{\alpha + (m-2)t} = e^{\alpha} \cdot (e^{t})^{(m-2)}$$

$$u_m = e^{V_m} = e^{\alpha + (m-1)t} = e^{\alpha} \cdot (e^{t})^{(m-1)}$$

Donc les (U_i) forment une suite géométique de raison $\boxed{d = e^t}$ et du premier terme $\boxed{U_1 = e^\alpha}$

3) Si on applique directement la formule on trouve :

$$S_n = e^\alpha \frac{1-(e^t)^n}{1-e^t} \quad \text{si } t \neq 0$$

si $t=0$ alors

$$S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = e^\alpha + e^\alpha + \dots + e^\alpha = n.e^\alpha$$

<u>limite de S_n qd $n \to +\infty$:</u>

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = e^\alpha . \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(e^t)^n}{1-e^t}$$

or $$(e^t)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } t=0 \\ +\infty & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}$$

alors ; <u>si $t=0$</u> $\lim_{n\to+\infty} S_n = \cancel{e^\alpha} \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

<u>si $t>0$</u> $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e^\alpha}{1-e^t} . -\infty = +\infty$

<u>si $t<0$</u> $\lim_{n\to+\infty} S_n = e^\alpha . \frac{1}{1-e^t} = \frac{e^\alpha}{1-e^t}$

<u>Conclusion</u> : S_n admet une limite qd $n \to +\infty$ pour <u>$t<0$</u>.

et dans ce cas $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{e^\alpha}{1-e^t}}$

4) $\alpha = 0$ et $t = -1$; on a $U_n = e^{\alpha}.(e^{t})^{(n-1)}$

donc $\boxed{U_n = e^{0}.(e^{-1})^{(n-1)} = e^{1-n}}$

dans ce cas : $t = -1 < 0$ $\quad S_n = e^{\alpha} \dfrac{1-(e^{t})^{n}}{1-e^{t}}$

donc $S_n = \dfrac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{1-e^{-1}}}$ car $e^{-n} = \dfrac{1}{e^{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

VI. Soit un phénomène économique (population d'un pays, revenu national, montant d'un livret de caisse d'épargne, ...), x_0 le nombre attaché à ce phénomène initialement et x_n sa valeur au bout de n années. On appelle taux de croissance du phénomène le rapport

$$t = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}.$$

On suppose t constant et $n \in \mathbb{N}$.

1°) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Calculer x_n en fonction de x_0, t, n.

2°) Le taux de croissance t d'une population est de 6 %. Au bout de combien d'années, la population a-t-elle doublé ? triplé ?

Solution :

1°)
$$t = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \iff x_{n+1} - x_n = t\,x_n$$
$$\iff x_{n+1} = (1+t)\,x_n.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison "1+t".

On en déduit (par récurrence) que : $x_n = (1+t)^n x_0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2°) Appelons p_0 la population pour $n=0$. On a donc, à la fin de l'année n, une population : $p_n = (1+t)^n p_0 = (1,06)^n p_0$.

La population double lorsque :

$$(1,06)^n p_0 = 2p_0$$
$$(1,06)^n = 2$$
$$n \log(1,06) = \log(2) \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log 2}{\log(1,06)} \simeq 12$$

La population triple lorsque :

$$(1,06)^n p_0 = 3p_0 \implies (1,06)^n = 3$$
$$\implies n \log(1,06) = \log 3 \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\log 3}{\log(1,06)} \simeq 19.$$

Exercice 7:

Pour les prévisions du logement dans une nouvelle ville, on prévoit au début (1999) 300.000 habitants et un logement pour 10 personnes. Le taux de croissance de la population est de 3% par an.

1) Quelle est la nature de la progression (en logement). Donner son premier terme et sa raison.

2) Combien de logement faut-il prévoir en 2002 ?

3) En quelle année faut-il prévoir le double du nombre de logement du début ?

On donne : $\log 2 = 0,69$ $\quad \log(1,03) = 0,03$

Solution :

1) Nombre de logements au départ (1999) : $L_0 = \frac{300.000}{10} = 30.000$

Nombre de logements de la $1^{\text{ère}}$ année (2000) : $L_1 = 30.000 + (30.000 \times 0{,}03)$

$= 30.000(1+0{,}03)$

$L_1 = 30.000 \times (1{,}03)$

Nombre de logements de la $2^{\text{ème}}$ année (2001) : $L_2 = L_1 + L_1 \cdot 0{,}03$

$= L_1(1+0{,}03)$

$= L_1 \cdot (1{,}03)$

$L_2 = 30.000 \cdot (1{,}03)^2$

La progression est de la forme : $L_n = 30.000 \cdot (1{,}03)^n$

C'est une suite géométrique de 1^{er} terme $L_0 = 30.000$ et de raison

$q = 1{,}03$

2) Nombre de logements en 2002 est $L_3 = 30.000 \cdot (1{,}03)^3$

$= 32781{,}9 \approx 32.782$

3) $2L_0 = L_0 \cdot (1{,}03)^n \Rightarrow 2 = (1{,}03)^n$

$\Rightarrow \log 2 = \log (1{,}03)^n$

$\Rightarrow \log 2 = n(\log 1{,}03)$

$\Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1{,}03} = \frac{0{,}69}{0{,}03} = 23$

Il faut prévoir le double de logements dans 23 ans soit en $1999 + 23 = 2022$.

Exercice IX, page 124

Montrer que la suite $U_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$ est bornée.

Est-elle convergente ?

Solution : On a $|U_n| = \frac{n+1}{n+2} < 1$ donc (U_n) est bornée, mais comme elle n'est pas monotone, on ne peut pas conclure qu'elle converge, la suite admet 2 points d'accumulation -1 et $+1$, donc elle diverge.

Exercice X, page 124

Déterminer la nature des suites définies ci-dessous par leur terme général U_n :

① $U_n = \frac{\log n}{\sqrt{n+1}}$ ② $U_n = \sqrt{n^2+3n} - n$

③ $U_n = \left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^n$ ④ $U_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

Solution :

① $U_n = \frac{\log n}{\sqrt{n+1}}$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ croît plus rapidement que $x \mapsto \log x$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n+1}} = 0$; donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

② $U_n = \sqrt{n^2+3n} - n$

On utilise la partie conjuguée (cas des racines carrées)

$$\sqrt{A}-B=\frac{(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B)}{(\sqrt{A}+B)}=\frac{A-B^2}{\sqrt{A}+B}$$

Application :

$$\sqrt{n^2+3n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(\sqrt{n^2+3n}+n)}=\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$

$$=\frac{3n}{n\sqrt{1+\frac{3}{n}}+n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{3n}{2n}\quad\left(\text{car } \sqrt{1+x}\underset{0}{\sim}1\right)$$

$\Rightarrow (U_n)_n$ converge vers $\frac{3}{2}$

(3) $U_n=\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)^n$ divergente $\forall n\in\mathbb{N}^*$

on a : $1+\sqrt{1+n^{-1}}>1+1=2$

$\Rightarrow$ $2^n<\left(1+\sqrt{1+n^{-1}}\right)^n$
$(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite géométrique divergente $\Big\}$ Théorème 2 d'Encadrement

(4) $U_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

on a: $\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\geqslant\frac{1}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

et on a pour $n\geqslant 3$; $U_n\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n$

donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n\leqslant U_n\leqslant\left(\frac{5}{6}\right)^n$ (Théorème.1 d'Encadrement)

$\left(\frac{5}{6}\right)^n$ suite géométrique majorante $\to 0$

donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) , \quad \frac{1}{2} \leqslant U_n \leqslant 1 .$$

2) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. 3) En déduire qu'elle est convergente.

4) Déterminer sa limite.

Solution :

1) • Pour montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie il s'agit en fait de voir que l'on aboutit jamais à $U_n = -1$.

Or, il est aisé de voir que si U_m existe et $U_m > 0$, $(m \in \mathbb{N})$ alors $U_{m+1} = \frac{2U_m}{U_m+1}$ existe et $U_{m+1} > 0$. Comme $U_0 = \frac{1}{2} > 0$, une récurrence triviale montre que $(\forall n \in \mathbb{N})$, U_n existe et $U_n > 0$.

• On a $\boxed{U_{n+1} = f(U_n)}$

avec $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ $\quad (\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\})$

comme on a vu que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n > 0$, on se contente donc d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$:

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} \text{ donne } f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$
$$(\forall x \in \mathcal{D}_f)$$

D'où le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2

- On est maintenant en mesure de montrer par récurrence que l'on a

$(\forall n \in \mathbb{N})$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ $\quad (\mathcal{P}(n))$

* $\mathcal{P}(0)$ est vraie $\left(\frac{1}{2} \leqslant u_0 = \frac{1}{2} \leqslant 1 \right)$

* Soit $m \in \mathbb{N}$ arbitrairement choisi. Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie et montrons qu'alors $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie :

. si $\frac{1}{2} \leq u_m \leq 1$, on a $\frac{2}{3} \leqslant f(u_m) = u_{m+1} \leqslant 1$ d'après le tableau de variations de f.

Donc $\frac{1}{2} \leqslant u_{m+1} \leqslant 1$ à fortiori

Ainsi $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

Finalement $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

2) On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n}{u_n+1} - u_n$

$$= \frac{2u_n - u_n(u_n+1)}{u_n+1}$$

$$= \frac{-u_n^2 + u_n}{u_n+1} = \frac{u_n(1-u_n)}{1+u_n}$$

Comme on a vu précédemment que

$(\forall n \in \mathbb{N})$, $0 < u_n$ et $u_n \leq 1$

On a donc $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(1-u_n)}{1+u_n} \geq 0$

d'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3) Puisqu'on a vu que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par 1) alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4) $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}+$

donc la suite récurrente à valeurs positives $u_{n+1} = f(u_n)$, $u_0 = \frac{1}{2}$ a pour limite une valeur l vérifiant $f(l) = l$.

c'est-à-dire
$$\frac{2l}{l+1} = l$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l \neq -1 \\ 2l = l^2 + l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l \neq -1 \\ l^2 = l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = 0 \\ \text{ou} \\ l = 1 \end{cases}$$

Mais la valeur $l = 0$ est exclue puisqu'on a vu que cette suite est croissante à partir de $u_0 = \frac{1}{2}$.

Ainsi la suite converge vers 1.

Exercice XII, page 125

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \geq \sqrt{2}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4) Déterminer sa limite.

Solution :

Solution :

1) • On a $u_{n+1} = f(u_n)$

avec $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$ $\quad (D_f = \mathbb{R}^*)$

Ainsi $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 2}{2x^2} = \dfrac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}$

On étudie f sur $\mathbb{R}_+^*$ seulement puisqu'une récurrence immédiate montre que $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n > 0$ ...

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

$u_1 \geqslant \sqrt{2}$

$\Uparrow$

$\overbrace{u_1 = \frac{17}{12} = 1{,}4166}$

... par conséquent, on a $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant \sqrt{2} = 1{,}414$

Comme $u_0 = \dfrac{3}{2} > \sqrt{2}$, on a bien : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

2) • D'après l'inégalité précédente : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$

et puisque f est strictement croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$

il s'ensuit que la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_0 = \frac{3}{2} \end{cases}$

est monotone.

Or, on a $u_1 = \dfrac{u_0}{2} + \dfrac{1}{u_0} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{17}{12} < \dfrac{3}{2} = u_0$

$\Rightarrow u_1 < u_0$

et par un théorème vu dans le cours, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3) puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par $\sqrt{2}$) elle est convergente.

4) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

donc la suite récurrente à valeurs strictement positives $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = \frac{3}{2}$ a pour limite une valeur l définie par

telle que $f(l) = l \iff l = \frac{l}{2} + \frac{1}{l} = \frac{l^2+2}{2l}$

$\iff 2l^2 = l^2 + 2 \iff l^2 = 2$

$\iff l = \pm\sqrt{2}$

Mais cette suite étant à valeurs strictement positives, la valeur $l = -\sqrt{2}$ est exclue.

Ainsi la suite converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice XIII, page 125

Considérons les deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\text{et } v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$$

Montrer que ces deux suites sont convergentes et ont la même limite.

Solution: on va montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes

On a déja montrer que $(u_n)_n$ est convergente (croissante + majorée) et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$ (voir cours). Reste à montrer que v_n décroissante on a :

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)((n+1)!)} - U_n - \frac{1}{n(n!)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n(n!)} + \frac{1}{(n+1)((n+1)!)}$$

$$= \frac{n(n+1) - (n+1)^2 + n}{n.(n+1).(n+1)!} = \frac{\cancel{n^2} + \cancel{n} - \cancel{n^2} - \cancel{2n} - 1 + \cancel{n}}{n.(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{-1}{n.(n+1).(n+1)!} < 0$$

alors la suite (V_n) est strictement décroissante.

Par ailleurs, on a :

$$V_n - U_n = \frac{1}{n(n!)} > 0$$

donc $V_n > U_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = 0$

Il en résulte que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes ; et par conséquent, elles sont convergentes et ont la même limite.

Exercice XIV, page 125

Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites numériques définies par :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

$$V_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1)$$

1) Étudier le signe de f et g deux fonctions définies sur $]-1, +\infty[$ par :

$f(x) = \log(1+x) - x$ et $g(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$.

2) En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroissante et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ croissante.

3) Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite (qu'on ne demande pas de calculer)

Solution:

1°) $$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1-(1+x)}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$

x	-1		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$1+x$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Par suite $\forall x \in]-1, +\infty[\quad f(x) \leqslant 0$

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)-1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \log(1+x) - \frac{x}{1+x} = \lim_{u \to 0^+} \log u - \frac{u-1}{u}$$

(Poser $u = x+1$, $x = u-1$)

$$= \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u}\Big(\underbrace{u \log u}_{\to 0} - \underbrace{u}_{\to 0} + 1\Big) = +\infty$$

Par suite $\forall x \in]-1,+\infty[\;;\; g(x) \geqslant 0$

2°) $$u_{n+1} - u_n = \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) - \log(n+1)$$
$$- \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \log(n)\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n$$
$$= \frac{1}{n+1} - \left(\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} - \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$= -g\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 0 \quad (\text{d'après } 1°))$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

$$v_{n+1} - v_n = \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) - \log(n+2)$$
$$- \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \log(n+1)\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} - \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$= -f\left(\frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0 \quad (\text{d'après } 1°))$$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.

3°) $$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty}(-\log n) - (-\log(n+1))$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) > \log 1 = 0$$

Conclusion :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît et $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes ;

Par théorème de cours, elles convergent donc vers une limite commune.