Compléments de cours et TD, chapitre 0 : Composition des Applications

Mohamed El Merouani

Solution de l'exercice V.- de la page 16 du livre :

$$f : \mathbb{N}^* \longrightarrow [0,9]$$

$$n \longmapsto 1 - \frac{8}{n} + \frac{16}{n^2}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 - \frac{8}{n} + \frac{16}{n^2} = \left(\frac{4}{n} - 1\right)^2 \geq 0$ La question qui se pose : est ce que $\left(\frac{4}{n} - 1\right)^2 \geq 9$?
   On a : $\left(\frac{4}{n} - 1\right)^2 - 9 = \left(\frac{4}{n} - 1\right)^2 - 3^2 = \left(\frac{4}{n} - 1 - 3\right)\left(\frac{4}{n} - 1 + 3\right)$
   $$= \left(\frac{4}{n} - 4\right)\left(\frac{4}{n} - 2\right) < 0$$
   Comme $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n > 1 \Rightarrow \frac{4}{n} < 4$ Donc, on a $\left(\frac{4}{n} - 1\right)^2 < 9 \Rightarrow \left(\frac{4}{n} - 1\right)^2 \in [0,9]$
   Par suite f est une application de $\mathbb{N}^*$ vers $[0,9]$.
2. f n'est pas une bijection de $\mathbb{N}^*$ vers $[0,9]$. En effet, soit $y \in [0,9]$, alors
   $$\begin{cases} y = f\left(\frac{4}{1+\sqrt{y}}\right) = f\left(\frac{4}{1-\sqrt{y}}\right) & \text{si} \quad y \neq 1 \\ y = f(2) & \text{si} \quad y = 1 \end{cases}$$
   On remarque que les antécédents de y, $\frac{4}{1+\sqrt{y}}$ et $\frac{4}{1-\sqrt{y}}\frac{4}{1-\sqrt{y}}$ n'appartiennent pas à $\mathbb{N}^*$ pour tout $y \in [0,9]$. Par exemple, pour $y = 2$ son antécédent n'appartient pas à $\mathbb{N}^*$ i.e. même si $f\left(\frac{4}{1-\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{8}{\frac{4}{1-\sqrt{2}}} + \frac{16}{\frac{16}{(1-\sqrt{2})^2}} = 2$, on a $\frac{4}{1-\sqrt{2}} \notin \mathbb{N}^*$

Correction de l'exercice VI.- de la page 16 du livre :

<u>Définition 1 :</u>
Soit l'application $f : E \longrightarrow F$. *On dit que* f *est injective si, et seulement si,* $\forall x, y \in E; f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

<u>Défintion 2 :</u> *Soit* $f : E \longrightarrow F$. *On dit que* f *est surjective si, et seulment si,* $f(E) = F$ *c'est à dire* $\forall y \in F, \exists x \in E$ *tel que* $f(x) = y$.

<u>Théorème :</u>
Soit l'application $f : E \longrightarrow F$.
f *est bijective si, et seulement si, elle est à la fois, injective et surjective.*

□ Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$, alors $g \circ f : E \longrightarrow E$ et $f \circ g : F \longrightarrow F$ sont bien définies.
On montre que $g \circ f$ bijective $\Longrightarrow f$ injective et g surjective.

et $f \circ g$ bijective $\Longrightarrow g$ injective et f surjective.
★ Soit $(x,y) \in E \times E$ tel que $f(x) = f(y)$

$$\Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow g \circ f(x) = f \circ g(y)$$

$\Longrightarrow x = y$ (car $g \circ f$ est bijective et donc injective).
Donc f est injective.
Montrons que g est surjective.
Soit $y \in E, \exists ?x \in F$ tel que $g(x) = y$.
Comme $g \circ f$ est surjective, alors $\exists z \in E$ tel que $g \circ f(z) = y$
i.e. $g(f(z)) = y$
On prend $x = f(z) \in F$ et on a bien $g(x) = y$
Donc g est surjective.
★ Soit $(x,y) \in F \times F$ tel que $g(x) = g(y)$

$$\Longrightarrow f(g(x)) = f(g(y))$$
$$\Longrightarrow f \circ g(x) = f \circ g(y)$$

$\Longrightarrow x = y$ (car $f \circ g$ est bijective et donc injective).
Donc g est injective.
Montrons que f est surjective.
Soit $y \in F, \exists ?x \in E$ tel que $f(x) = y$
Comme $f \circ g$ est surjective, alors $\exists z \in F$ tel que $f \circ g(z) = y$,
i.e. $f(g(z)) = y$.
On prend $x = g(z) \in E$ et on a bien $f(x) = y$.
Donc f est surjective.
Par conséquent, f et g sont injectives et surjectives, donc elles sont bijectives.
Solution de l'exercice VII.- de la page 16 du livre :
On sait que si f, g et h sont bijectives, alors $g \circ f$ et $h \circ g$ le sont, d'après propriété vue dans le cours page 14.
Réciproquement, soit $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives. D'après l'exercice précédent, $g \circ f$ bijective $\Longrightarrow f$ injective et g surjective
$h \circ g$ bijectives $\Longrightarrow g$ injectives et h surjective
Il en résulte que g est bijective.
En écrivant $f = g^{-1} \circ (g \circ h)$ et $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$, on déduit que f et h sont bijectives.