Chapitre 3 : Méthode des deux phases du Simplexe

Exercice 2, page 50 :

1) On introduit une variable de surplus dans la $1^{ère}$ contrainte notée $e1\geq 0$ et une variable d'écart $e2\geq 0$ dans la $2^{ème}$ contrainte, le problème devient :

$$\begin{aligned} &\text{Min } x1+x2+x3 \\ &\text{Sujet à } x1+x2+2x3-e1=3 \\ &\qquad x1+x2+e2=2 \\ &\qquad x1, x2, x3\geq 0 \\ &\qquad e1, e2\geq 0 \end{aligned}$$

On va utiliser la méthode des deux phases du simplexe en introduisant deux variables artificielles t1 et t2 non-négatives dans les contraintes ; car les coûts marginaux sont non-négatives et le problème est de minimisation :

$$x1+x2+2x3-e1+t1= 3$$

$$x1+x2+e2+t2=2$$

Soit $M=t1+t2$

Or $\quad t1= 3- x1-x2-2x3+e1$

$\quad t2=2- x1-x2-e2$

donc $M=-2x1-2x2-2x3+e1-e2+5$

Phase I :

$$\text{Min } M=-2x1-2x2-2x3+e1-e2+5$$

$$\begin{aligned} &\text{Sujet à } x1+x2+2x3-e1=3 \\ &\qquad x1+x2+e2=2 \\ &\qquad x1+x2+x3-Z=0 \\ &\qquad x1, x2, x3\geq 0 \\ &\qquad e1, e2\geq 0 \\ &\qquad t1, t2\geq 0 \end{aligned}$$

V. b.	x1	x2	x3	e1	e2	t1	t2	−Z	−M	T. d.
t1	1	1	2	−1	0	1	0	0	0	3
t2	1	1	0	0	1	0	1	0	0	2
−Z	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
−M	−2	−2	−2	1	−1	0	0	0	1	−5

La variable d'entrée est x3 car en divisant les termes de droite par les coefficients de tous les variables susceptibles d'entrer dans la base, soit $\frac{3}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2}$ et $\frac{2}{0}$, la plus petite valeur positive correspond à x3 et un pivot en 2 et la variable de sortie est t1 ; on exécute le pivot, on obtient le tableau suivant :

V. b.	x1	x2	x3	e1	e2	t1	t2	−Z	−M	T. d.
x3	1/2	1/2	1	−1/2	0	1/2	0	0	0	3/2
t2	1	1	0	0	1	0	1	0	0	2
−Z	1/2	1/2	0	1/2	0	−1/2	0	1	0	−3/2
−M	−1	−1	0	0	−1	1	0	0	1	−2

Par un raisonnement pareil au précédent, la variable d'entrée est e2, le pivot est 1 et la variable de sortie est t2. Le tableau suivant est :

V. b.	x1	x2	x3	e1	e2	t1	t2	−Z	−M	T. d.
x3	1/2	1/2	1	−1/2	0	1/2	0	0	0	3/2
e2	1	1	0	0	1	0	1	0	0	2
−Z	1/2	1/2	0	1/2	0	−1/2	0	1	0	−3/2
−M	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0

M=0=> L'ensemble des solutions réalisables est non vide.

Une solution de base réalisable est $x1=x2=0$; $x3=3/2$, $e1=0$ et $e2=2$

Phase II :

On élimine t1, t2 et M du dernier tableau de la phase I, on obtient :

V. b.	x1	x2	x3	e1	e2	−Z	T. d.
x3	1/2	1/2	1	−1/2	0	0	3/2
e2	1	1	0	0	1	0	2
−Z	1/2	1/2	0	1/2	0	1	−3/2

Exercice 3, page 51 :

La forme standard est :

$$\text{Min } Z=3x1+4x2+5x3$$

Sujet à $\quad x1+2x2+3x3-x4=5$

$2x1+2x2+x3-x5=6$

$x1, x2, x3\geq 0$

Méthode des deux phases : Soit $M=t1+t2$

avec $\quad x1+2x2+3x3-x4+t1=5$

$2x1+2x2+x3-x5+t2=6$

$x1, x2, x3\geq 0$ et $t1, t2\geq 0$

donc $\quad t1=5-x1-2x2-3x3+x4$

$t2=6-2x1-2x2-x3+x5$

alors $M=-3x1-4x2-4x3+x4+x5+11$

Les contraintes : $x1+2x2+3x3-x4+t1=5$

$2x1+2x2+x3-x5+t2=6$

$3x1+4x2+5x3-Z=0.$

Phase I :

V.b.	x1	x2	x3	x4	x5	t1	t2	−Z	−M	T.d.
t1	1	2	3	−1	0	1	0	0	0	5
t2	2	2	1	0	−1	0	1	0	0	6
−Z	3	4	5	0	0	0	0	1	0	0
−M	−3	−4	−4	1	1	0	0	0	1	−11

V.b.	x1	x2	x3	x4	x5	t1	t2	−Z	−M	T.d.
x2	1/2	1	3/2	−1/2	0	1/2	0	0	0	5/2
t2	1	0	−2	1	−1	−1	1	0	0	1
−Z	1	0	−1	2	0	−2	0	0	1	−10
−M	−1	0	2	−1	1	2	0	1	0	−1

V.b.	x1	x2	x3	x4	x5	t1	t2	−Z	−M	T.d.
x2	0	1	5/2	−1	1/2	1	−1/2	0	0	2
x1	1	0	−2	1	−1	−1	1	0	0	1
−Z	0	0	1	1	1	−1	−1	0	1	−11
−M	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0

M=0 => L'ensemble des solutions est non vide.

Phase II :

V.b.	x1	x2	x3	x4	x5	−Z	T.d.
x2	0	1	5/2	−1	1/2	0	2
x1	1	0	−2	1	−1	0	1
−Z	0	0	1	1	1	0	−11

On est à l'optimum, une solution optimale est : x1=1 ; x2=2 ; x3=0 ; x4=x5=0 et la valeur optimale est Z=11.