Examen partiel d'analyse (Durée : 2 heures)

Exercice 1 :

Résoudre dans IR les équations :

1°) $(Log\,x)^3 - 4(Log\,x)^2 - 29(Log\,x) - 24 = 0$

2°) $e^{2x} - 4e^{x} - 29 - 24e^{-x} = 0$

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3+\cos x} - 2}{x^2}$

2°) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\cos x)(Log\,tg\,x)$

3°) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+1)e^{\frac{1}{x^2}}$

4°) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 + 3Log\,x)$

Exercice 3 :

1°) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$$\cos 3x = (2\cos 2x - 1)\cos x\,.$$

2°) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n(\alpha) = Log\left(2\cos\frac{\alpha}{3} - 1\right) + Log\left(2\cos\frac{\alpha}{3^2} - 1\right) + \cdots + Log\left(2\cos\frac{\alpha}{3^n} - 1\right)$$

où Log désigne le logarithme népérien et α un nombre réel donné de l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right[$.

a°) Justifier l'existence de $S_n(\alpha)$.

b°) En utilisant la première question, montrer que :

$$S_n(\alpha) = Log\cos\frac{\alpha}{2} - Log\cos\frac{\alpha}{2\cdot 3^n}\,.$$

c°) Calculer $S(\alpha) = \lim\limits_{n\to +\infty} S_n(\alpha)$.

Exercice 4 :

On considère les fonctions réelles de la variable réelle x, suivantes :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1. Etudier la parité de f et de g.
2. Montrer que $f^2(x) - g^2(x) = 1$
3. Montrer que $f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$
   et $g(x+y) = g(x)f(y) + g(y)f(x)$
4. Montrer que les fonctions f et g sont dérivables sur IR et que $f'(x) = g(x)$ et $g'(x) = f(x)$.
5. Représenter sur un même repère les courbes de f et de g.