Correction des exercices de la page 55 à la page 60 du livre

Prof. Mohamed El Merouani

I.- La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$f'(x) = \frac{-\sin\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2+5}}$$

La fonction g existe, continue et dérivable dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on a :

$$g'(x) = \frac{1}{2g(x)} \frac{\cos x(1-\sin x)+\cos x(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}} \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{1-\sin x}$$

La fonction h est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$h(x) = \exp\left\{\frac{Logx}{x}\right\}$$

sa dérivée est :

$$h'(x) = \exp\left\{\frac{Logx}{x}\right\} \frac{1-Logx}{x^2}$$

La fonction ℓ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\ell'(x) = \frac{1}{1+(e^{-2x})^2} \cdot (-2e^{-2x})$$

$$= \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-4x}}$$

II.- D'abord corrigeons l'expression de la première fonction, c'est $f(x) = Arcsin(1-x^3)$ au lieu de $f(x) = \sin(1-x^3)$.
Alors, en utilisant les théorèmes généraux sur la dérivabilité, f, g et h sont dérivables sur $]0, 1]$.

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{\sqrt{1-(1-x^3)^2}}$$

$$= \frac{-3x^2}{\sqrt{2x^3 - x^6}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-3}{\sqrt{2-x^3}}\sqrt{x}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) =$.
Pour étudier la dérivabilité des fonctions g et h en 0, il est plus commode d'utiliser le taux d'accroissement,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{-\frac{Logx}{x^2}} = +\infty$$

donc h n'est pas dérivable en 0.
III.-

1. Puisque le polynôme $x^2 - x + 1$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$, f est donc continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
   <u>Étude de la continuité de f au point 1 :</u>

   $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2-x+1} = 1$$

   $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2-x+1} = -1$$

   Donc f n'est pas continue au point 1. Par conséquant, elle n'est pas dérivable au point 1.
   <u>Étude de la dérivabilité de f au point 0 :</u>

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{|x|}{x}\right)\frac{1}{x^2-x+1} = -1$$

   D'autre part

   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{|x|}{x}\right)\frac{1}{x^2-x+1} = 1$$

   Donc f n'est pas dérivable en 0. Par conséquant, elle est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

2. En utilisant les théorèmes généraux sur la dérivabilité, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf peut être aux points $x = 1$ et $x = -1$. Pour étudier la dérivabilité de la fonction g en 1 il est plus commode d'utiliser le taux d'accroissement

   $$\lim_{x\to 1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = 0(\text{car} \quad g(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \geq 1)$$

   $$\lim_{x\to 1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}\exp\{\frac{1}{x^2-1}\}$$

   $$= \lim_{x\to 1^-} (x+1)\frac{1}{x^2-1}\exp\{\frac{1}{x^2-1}\}$$

On pose $X = \frac{1}{x^2-1}$ donc on a $\lim\limits_{x\to 1^-} X = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} Xe^X = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-1} = 0$, par conséquant, g est dérivable au point 1 et on a $g'(1) = 0$.

De la même manière, on montre que $g'(-1) = 0$.

3. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf peut être au point $x = 0$. Pour étudier la dérivabilité de la fonction h en 0, on utilise le taux d'accroissement

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = x^{n-1}\sin\frac{1}{x} = 0 \quad (\text{car} \quad n > 2)$$

donc h est dérivable au point 0 et on a $h'(0) = 0$.

4. On a :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{e^{x-1}} = 1 \neq f(1) = 0$$

Donc la fonction f n'est pas continue en $x = 1$ et par conséquent, elle n'est pas dérivable en $x = 1$.

IV.- En utilisant les théorèmes fondamentaux de la dérivabilité, la fonction f est dérivable. Si on pose $u(x) = \sin^p x$ et $v(x) = \cos^q x$, on a :

$$f(x) = u(x)\cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Puisque $u'(x) = p\cos x \sin^{p-1} x$ et $v'(x) = -q\sin x\cos^{q-1} x$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= p\sin^{p-1} x\cos^{q+1} x - q\cos^{q-1} x\sin^{p+1} x \\ &= \sin^{p-1} x\cos^{q-1} x(p\cos^2 x - q\sin^2 x) \end{aligned}$$

V.-Calculons les dérivées $n^{\text{ième}}$ des fonctions :

1. On montre par récurrence que

$$f^{(n)}(x) = m\cdot(m-1)\cdots(m-(n-1))x^{m-n}; \forall m\in\mathbb{N}; n\leq m$$

Cette relation est vraie pour $n = 1$,

$$f'(x) = mx^{m-1}$$

Supposons que cette relation est vraie jusqu'à l'ordre n (H.R.) :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' \\ &= (m\cdot(m-1)\cdots(m-(n-1))x^{m-n})' \\ &= m\cdot(m-1)\cdots(m-(n-1)\cdot(m-n))x^{m-(n+1)} \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

On remarque que $f^m(x) = m!$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}, n > m, f^n(x) = 0$$

donc

$$f^n(x) = \begin{cases} m\cdot(m-1)\cdots(m-(n-1))x^{m-n} & \text{si } n\leq m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

2. Pour tout $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} = (x-1)^{-1}$$
$$f'(x) = -1(x-1)^{-2} = (-1)1!(x-1)^{-2}$$
$$f''(x) = 2(x-1)^{-3} = (-1)^2 2!(x-1)^{-3}$$
$$f^{(3)}(x) = -6(x-1)^{-4} = (-1)^3 3!(x-1)^{-4}$$

Raisonnons par récurrence : si $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x-1)^{-n-1}$ (H.R.), alors

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n(-n-1)n!(x-1)^{-n-2} = (-1)^{n+1}(n+1)!(x-1)^{-n-2}.$$

Donc :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(x-1)^{-n-1}$$
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

3. Pour tout $x \neq -1$ et $x \neq 1$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

on trouve :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

4. On rappelle la formule de Leinbitz :

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

On a vu dans le cours que

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Alors,

$$(x^2\sin x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)} \cdot \sin^{(n-k)}(x)$$
$$= C_n^0 x^2 \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + C_n^1(2x)\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + C_n^2(2)\sin\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= x^2\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2nx\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + n(n-1)\sin\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right).$$

On rappelle que

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$
$0! = 1$ par convention,
$1! = 1$

5. Par application de la formule de Leibnitz on a :

$$f^{(n)}(x) = (x^3 \cos x)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^3)^{(k)} \cdot \cos^{(n-k)}(x)$$

$$= C_n^0 x^3 \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + C_n^1 3x^2 \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + C_n^2 6x \cos\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= x^3 \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + 3nx^2 \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + 3x \cos\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$

VI.- Utilisation de la règle de l'Hospital, pour calculer les limites :

1. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + Logx}{xLogx} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{(F.I.)}$$

Il vient que, par application de la règle de l'Hospital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + Logx}{xLogx} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x + Logx)'}{(xLogx)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{Logx + 1} = 0$$

2. $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 Logx$ est une forme indéterminée de type $(0 \cdot \infty)$, que l'on peut transformer sous forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, comme suit : $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 Logx = \lim\limits_{x\to0} \frac{Logx}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$ (F.I.).
D'après la règle de l'Hospital, on obtient :

$$\lim_{x\to0^+} x^2 Logx = \lim_{x\to0^+} \frac{(Logx)'}{(\frac{1}{x^2})'} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{-x^2}{2} = 0$$

3. On pose $f(x) = e^{\sin x} - 1$ et $g(x) = \sin x$
f et g sont dérivables dans un voisinage de 0.

$$f'(x) = \cos x e^{\sin x} \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \cos x$$

On applique la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\cos x e^{\sin x}}{\cos x}$$

$$= 1$$

4. Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = Log(x+1) - x + \frac{x^2}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2$$

f et g sont deux fonctions dérivables dans un voisinage de 0.

$$f'(x) = \frac{x^2}{1+x} \qquad \text{et} \qquad g'(x) = 2x$$

On applique la règle de l'Hospital :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{2(x+1)}\\ &= 0\end{aligned}$$

5. Soient f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \cos(\pi x) + 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = (x-1)^2$$

f et g sont deux fonctions dérivables au voisinage de 1.

$$f'(x) = -\pi\sin(\pi x) \qquad \text{et} \qquad g'(x) = 2(x-1)$$

$$f''(x) = -\pi^2\cos(\pi x) \qquad \text{et} \qquad g''(x) = 2$$

On applique la règle de l'Hospital :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{g''(x)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{-\pi^2\cos(\pi x)}{2}\\ &= \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

VII.-Supposons f paire et dérivable sur D_f. On peut écrire pour tout $x \in D_f$:

$$\begin{aligned}f(-x) &= f(x)\\ f'(-x)\times(-1) &= f'(x)\\ f'(-x) &= -f'(x),\end{aligned}$$

ce qui montre que f' est impaire.
Supposons f impaire et dérivable sur D_f. On peut écrire pour tout x de D_f :

$$\begin{aligned}f(-x) &= -f(x)\\ f'(-x)\times(-1) &= -f'(x)\\ f'(-x) &= f'(x),\end{aligned}$$

ce qui montre que f' est paire.
Supposons f périodique, de période T. On peut écrire pour tout x de D_f :

$$\begin{aligned}f(x+T) &= f(x)\\ f'(x+T) &= f'(x),\end{aligned}$$

ce qui montre que f' a pour période T.

VIII.-

1. Le taux de variation est :

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h^3\sin\frac{1}{h^2}}{h}=h^2\sin\frac{1}{h^2}$$

si $h\neq 0$, on a $|\sin\frac{1}{h^2}|\leq 1$ et le taux $|\frac{f(h)-f(0)}{h}|\leq h^2$.
$\lim\limits_{h\to 0}h^2=0$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=0$
ce qui montre que $f'(0)=0$.

2. Pour $x\neq 0$;

$$f'(x)=3x^2\sin\frac{1}{x^2}+x^3\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{-2}{x^3}\right)=3x^2\sin\frac{1}{x^2}-2\cos\frac{1}{x^2}$$

On a vu au 1°) que $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}=0$, mais $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ et $\cos\frac{1}{x^2}$ n'a pas de limite quand $x\longrightarrow 0$. Donc la dérivée f' n'a pas de limite quand $x\longrightarrow 0$. Donc on ne peut pas appliquer le théorème des accroissements finis.
La dérivée f' n'est pas continue en $x=0$.

IX.-

1. Soit $x\in]0,1[$
On considère la fonction $f(t)=e^t$ définie, continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$. Appliquons le théorème des accroissements finis sur $]0,x[$. Alors, il existe $c\in]0,x[$ tel que :

$$e^x-e^0=(x-0)e^c\qquad\text{avec}\qquad c\in]0,x[$$
$$\Longrightarrow e^x-1=xe^c$$

$c<x$ et la fonction exponentielle est strictement croissante. Donc,

$$e^x-1<xe^x\qquad\text{alors}\qquad e^x(1-x)<1$$

D'où

$$\boxed{e^x<\frac{1}{1-x}}$$

De même $c>0$ alors $e^c>e^0$, c'est-à-dire $e^c>1$.
D'où $e^x-1>x$ alors

$$\boxed{e^x>1+x}$$

Finalement

$$\boxed{1+x<e^x<\frac{1}{1-x}}$$

2. Soit $t\in]0,1[$, alors d'après la question précédente on a :

$$1+t<e^t<\frac{1}{1-t}$$

On pose $t=\frac{1}{x}$ alors $x>1$ et on a :

$$1+\frac{1}{x}<e^{\frac{1}{x}}<\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{1+x}{x} < e^{\frac{1}{x}} < \frac{x}{x-1}$$

$$\Rightarrow Log\left(\frac{1+x}{x}\right) < \frac{1}{x} < Log\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

puisque la fonction "Log" est strictement croissante.

3. Soit $x > 0$. On considère la fonction $g(t) = Log(1+t) - t$, continue et dérivable sur $]0, x[$. Par application du théorème des accroissements finis, il existe un réel $c \in]0, x[$ tel que

$$g(x) - g(0) = (x-0)g'(c);$$

d'où

$$g(x) = -\frac{xc}{1+c}.$$

Et, puisque, x et c sont de même signe, alors $xc \geq 0$, donc $g(x) \leq 0$.
Il en résulte que pour tout $x > -1$, $Log(1+x) \leq x$.

X.-

1.

$$f'(x) = 1 + e^{1-x} > 0$$

donc f est strictement croissante, de plus elle est continue, donc f est bijective.

$$f(0) = -e \qquad \text{et} \qquad f(2) = 2 - \frac{1}{e}$$

2.

$$f(0) < 0 \qquad \text{et} \qquad f(2) > 0$$

donc 0 est une valeur intérmédiaire, $f(0) < 0 < f(2)$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 2]$ tel que $f(c) = 0$ et comme f est bijective, c est unique.

XI.- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf peut être au point $x = 0$. Pour étudier la dérivabilité de f en 0, on utilise le taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

donc f est dérivable au point 0 et on a $f'(0) = 0$.
On a : $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
On a vu que $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$, mais $\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite quand $x \longrightarrow 0$. D'où la dérivée f' n'a pas de limite quand $x \longrightarrow 0$.
Donc f' n'est pas continue en $x = 0$.
XII.-

1. f n'est pas définie en 0. Mais,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 - e^x = 0$$

$$\text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 0$$

Donc $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe et vaut 0, on pose :

$$g(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Alors g est définie et continue en 0, car $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$.
La fonction g est le prolongement par continuité en 0 de la fonction f.

2. Dérivabilité à droite en 0 de g :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x(e^x - 1)}{e^x + 1} = 0$$

g est dérivable à droite en 0 et on a $g'_d(0) = 0$.
Dérivabilité à gauche en 0 de g :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1 - e^x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = -1 \end{aligned}$$

$$\text{car} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{(voir cours chap. 4 page 68)}$$

g est dérivable à gauche en 0 et on a $g'_g(0) = -1$.
Conclusion :

$$g'_d(0) \neq g'_g(0)$$

Donc g n'est pas dérivable en 0.