Rappels de calcul des probabilités

Suite

1

Écart-type

- L'écart-type d'une variable aléatoire X, noté σ(X), est défini comme la racine carrée de sa variance,

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

2

Fonction de répartition:

- La probabilité pour que la variable aléatoire X prenne une valeur inférieure ou égale à x est une fonction F(x).
- Cette fonction est appelée fonction de répartition de x.

  $F(x)=P(X\leq x)$.
- La fonction F(x) est une fonction en escalier, croissante de 0 à 1.

3

Exemple de fonction de répartition:

- Pour l'expérience de lancement d'une pièce de monnaie, on a la loi de probabilité de X est résumée par le tableau suivant:

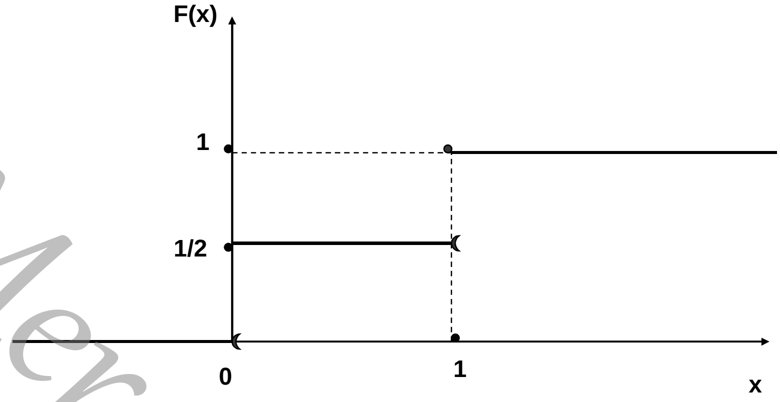
x_i	0	1	Σp_i
p_i	1/2	1/2	1

- Sa fonction de répartition sera:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1/2 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 1 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

4

Représentation graphique de F(x):



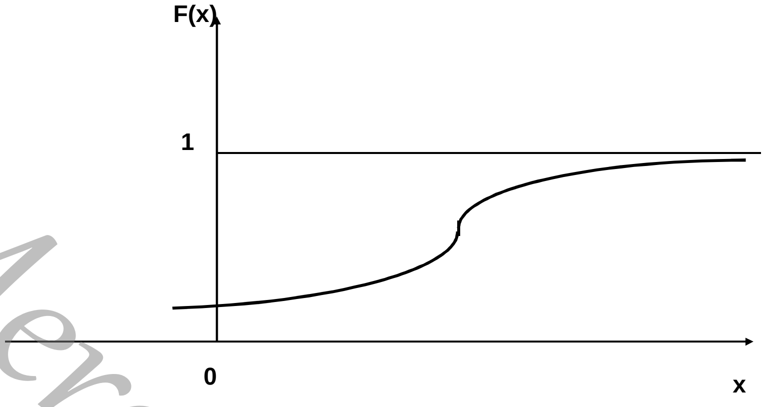
5

Fonction de répartition d'une v.a. continue:

- On définit la fonction de répartition F d'une v. a. continue X de la même manière que pour une v.a. discrète, c'est-à-dire $F(x)=P(X\leq x)$.
- La fonction continue $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ est croissante de 0 à 1 lorsque x varie de -∞ à +∞.
- Par conséquent, une v.a. continue est une v.a. dont la fonction de répartition est continue.
- La fonction de densité f d'une v.a. continue X est la dérivée de da fonction de répartition F, c'est-à-dire $F'(x)=f(x)$.

6

Représentation graphique de F(x) continue:



7

Conséquences:

- Pour X v.a. continue on a:
- $P(X=c)=0$ avec c une constante réelle.
- $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$ avec a et b des réelles.
- $P(X\leq a)=P(X<a)=\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$
- $P(X\geq b)=P(X>b)=\int_{b}^{+\infty} f(t)\,dt$

8

Loi de probabilités conjointes de deux v. a. discrètes:

- Un couple de v. a. (X, Y) peut prendre les valeurs successives suivantes:

$$(x_1,y_1)\ ;\ (x_2,y_2)\ ;\ \dots;\ (x_i,y_j)\ ;\ \dots;\ (x_n,y_m)$$

A chaque couple (x_i,y_j) correspond une probabilité p_{ij} d'observer simultanément la valeur x_i pour X et la valeur y_j pour Y:

$$p_{ij}=P(X=x_i\ et\ Y=y_j)=P(X=x_i,\ Y=y_j)$$

- On a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}=1$$

9

Loi de probabilités conjointes de deux v. a. continues:

- La loi de probabilité conjointes d'un couple de v. a. (X,Y) est définie lorsqu'on connaît:

1. Le domaine de définition du couple (où la fonction de densité de probabilité est non nulle) et;
2. La fonction de densité de probabilité conjointe f qui doit vérifier:
   a. $f(x,y)\geq 0$
   b. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

10

Indépendances des variables aléatoires discrètes :

- Deux v. a. discrètes X et Y sont dites indépendantes si

$$P(X=x_i;\ Y=y_j)=P(X=x_i).P(Y=y_j)$$

pour tout x_i et y_j.

11

Indépendances des variables aléatoires continues :

- Deux v. a. continues X et Y de fonctions de densités de probabilités marginales respectives f_1 et f_2 et de fonctions de probabilité conjointe f sont dites indépendantes si et seulement si

$$f(x,y)= f_1(x).f_2(y)$$

12

Covariance entre deux variables aléatoires:

- La covariance entre deux v. a. X et Y, notée $Cov(X,Y)$, est définie par

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

- Cas discrèt:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j P(X=x_i, Y=y_j)-E(X)E(Y)$$

- Cas continue:

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, y\, f(x,y)\, dx\, dy - E(X)E(Y)$$

13

Propriétes:

- Soient X et Y deux v. a., alors on a:
  a) $E(XY)=E(X)E(Y)+Cov(X,Y)$
  b) $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$
  c) $Var(\alpha X+\beta)=\alpha^2 Var(X)$ où α et β sont deux réels quelconques.
- Si les variables X et Y sont indépendantes, alors:
  a) $Cov(X,Y)=0$
  b) $E(XY)=E(X)E(Y)$
  c) $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

14

Coefficient de corrélation entre deux v. a.

- Le coefficient de corrélation entre deux v. a. X et Y, notée ρ_{xy} est défini par

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Le coefficient de corrélation varie entre -1 et 1:

$$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

15

Quelques lois de probabilités usuelles

Lois de probabilités discrètes

16

Loi de Bernoulli:

- Une v. a. X suit une loi de Bernoulli si elle prend les deux valeurs 1 et 0 avec $P(X=1)=p$ et $P(X=0)=q$ où $p+q=1$.
- $\{X=1\}$ est dit événement succès et $\{X=0\}$ est dit événement échec.
- X représente donc le nombre de succès obtenu après la réalisation d'une seule expérience aléatoire.

17

Loi de Bernoulli:

- La loi de probabilité de X suivant une loi de Bernoulli est:

x_i	1	0	Σp_i
p_i	p	q=1-p	1

Alors $E(X)=\Sigma x_i p_i=1xp+0xq=p$

$Var(X)=\Sigma x_i^2 p_i-E(X)^2=px1^2+qx0^2-p^2=p-p^2$

$Var(X)=p(1-p)=pq$

18

Loi Binômiale

- Considérons, lors d'une certaine expérience, un événement qui:
  - Soit se réalise avec la probabilité *p* (*p*=probabilité du succès).
  - Soit ne se réalise pas avec la probabilité *q=1-p* (*q*=probabilité d'échec).
- La probabilité de *k* réalisation (succès) de cet événement, au cours de *n* répétitions successives indépendantes de la même expérience, est fournie par la loi de probabilité binômiale: $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$

19

Loi Binômiale

- On la note symboliquement *B(n, p).*
- La loi binômiale est une loi de probabilité discrète, mais finie; en effet, le nombre de réalisation *k* est égale à *0, 1, 2, …, n*.
- Le coefficient $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

  où *n!* et *k!* indiquent le factoriel de *n* et de *k*,

  on a: *n!=1x2x3x…xn*

20

Loi Binômiale

- Espérance mathématique: $E(X)=np$
- Variance mathématique: $Var(X)=npq$
- Ecart-type: $\sigma(X)=\sqrt{npq}$
- La loi binômiale rend compte de tous les phénomènes répétés de manière indépendante pouvant prendre deux états, tels que: succès ou échec, tout ou rien.

21

Loi de Poisson:

- On dit qu'une v. a. obéit à une loi de Poisson, si elle est susceptible de prendre toutes les valeurs entières 0,1,2,…,k,…,n, les probabilités associées étant $p_0,p_1,p_2,\dots,p_k,\dots,p_n$, avec

$$p_k = P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

- λ étant un paramètre positif, et e la base des logarithmes népériens.
- La constante λ s'appelle le paramètre de la loi.
- La loi de Poisson est notée P(λ).

22

Loi de Poisson:

- Espérance mathématique: $E(X)=\lambda$
- Variance mathématique: $Var(X)=\lambda$
- Ecart-type: $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$
- La loi de Poisson est appelée loi des petites probabilités. On l'utilise pour représenter des phénomènes rares, tels que: nombre d'accidents, nombre de pannes, nombre de déchets dans une fabrication…

23

Quelques lois de probabilités usuelles

Lois de probabilités continues

24

Loi Normale:

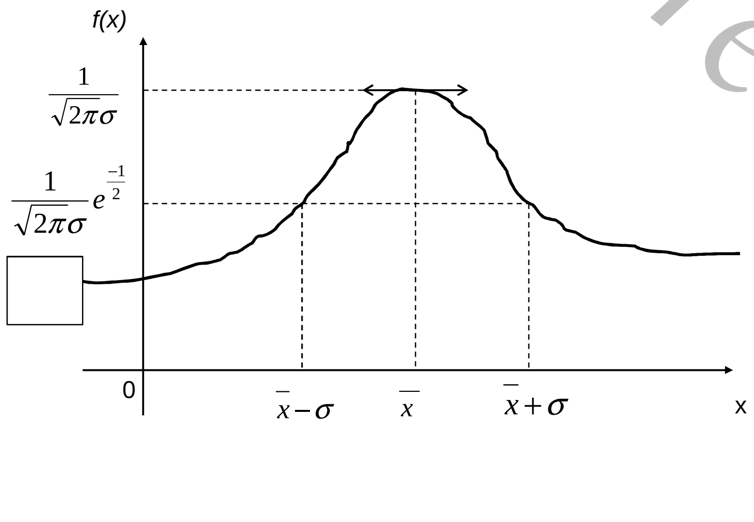
- La loi normale est la loi de probabilité d'une v.a. continue *X*, dont la densité de probabilité est:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

- On dit que l'on est en présence de la loi normale de moyenne $\bar{x}$ et d'écart-type σ.
- On la note par N($\bar{x}$, σ)
- Les deux paramètres de la loi sont $\bar{x}$ et σ.

25

Représentation graphique de N($\bar{x}$,σ)



26

Loi normale centrée, réduite

27

Variable normée

- Soit une v.a. X de réalisations x_i de moyenne $\overline{X}$ et d'écart-type σ_X.
- Définissons une nouvelle v.a. T de réalisations t_i telle que: $T = \frac{X - \overline{X}}{\sigma_X}$ de réalisations $t_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma_x}$
- La v.a. T de réalisations t_i est dite normée, si:
  - La moyenne arithmétique $\overline{t}$ est nulle: $\overline{t}=0$ (centrée)
  - L'écart-type σ_t est égal à l'unité: $\sigma_t = 1$ (réduite).

28

Définition de la loi normale centrée réduite

- En faisant le changement de variable

$$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

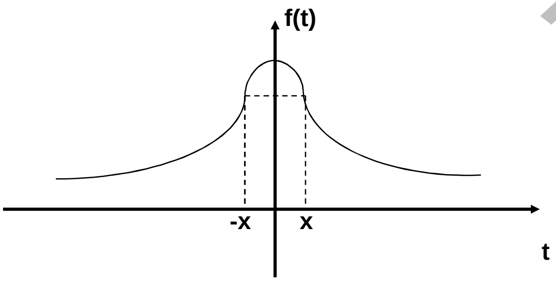
la loi normale N(m,σ) s'écrit:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-\left[(t\sigma+\bar{x})-\bar{x}\right]^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

cette loi est la loi normale, centrée réduite, car elle est de moyenne nulle et d'écart-type égal à l'unité. On la note N(0,1).

29

Allure et propriété de la loi normale réduite:



C'est une fonction symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car elle est paire f(-x)=f(x)

Ainsi les tables de la loi normale centrée réduite, donnent les valeurs de la fonction f(t) uniquement pour des valeurs positives de la variable t.

30

La probabilité pour que T prenne une valeur de l'intervalle (t_1,t_2)

- S'écrit alors:

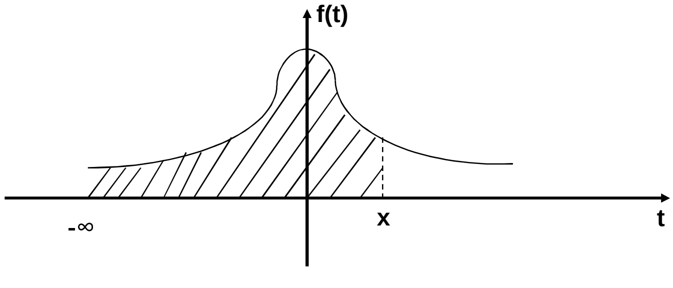
$$P(t_1 < T < t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

31

Fonction intégrale de la loi normale centrée réduite:

- On définit la fonction intégrale π(t) de la loi normale centrée réduite, en intégrant la fonction f(t) densité de probabilité de t:

$$\pi(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$



32

Propriétés:

- On démontre que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

- L'aire comprise entre la courbe N(0,1) et l'axe des t est égale à l'unité.

33

Exercice:

- La taille d'un groupe de 2000 personnes obéit à une loi normale N(170 cm, 5 cm).
- On demande de déterminer:

1. Le nombre de personnes dont la taille est comprise entre 168cm et 175cm.
2. La probabilité pour qu'une personne ait une taille supérieure à 180cm.

34

Solution:

1. Définissons la variable centrée réduite T à partir de la variable aléatoire *X*:

$$T = \frac{X - 170}{5}$$

- Alors P(168<X<175)=P(-0,4≤t≤+1)=
  =π(1)- π(-0,4)= π(1)-(1- π(0,4))=
  =π(1)+ π(0,4)-1

  Soit, en cherchant les valeurs de π(1) et de π(0,4) dans la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée réduite: croisement de la ligne 1,0 et de la colonne 0,00; croisement de la ligne 0,4 et de la colonne 0,00.

35

- P(168≤x≤175)=0,8413+0,6554-1=0,4967
- Il y a donc: 2000x0, 4967≈993personnes dont la taille est comprise entre 168cm et 175cm.

2. La probabilité pour qu'une personne ait une taille supérieure à 180cm est:

   P(X>180)=P(T>2)=1-π(2)=1-0,9772=0,0228 soit une probabilité de 2,3%.

   Il y a alors vraisemblablement 2000x0,0228≈45personnes dont la taille dépasse 180cm.

36