Chapitre 3 : Probabilités

I) Introduction :

1-Epreuve ou expérience :

On appelle **épreuve** ou **expérience** une certaine action que l'on peut répéter plusieurs fois. Par exemple :

- ✓ lancer un dé.
- ✓ lancer une pièce de monnaie.

Pour une épreuve déterminée, il y a plusieurs résultas possibles, par exemple :

- Dans l'épreuve « lancer un dé », il existe 6 résultats possibles : les valeurs 1, 2, 3, 4, 5,6
- dans l'épreuve « lancer une pièce de monnaie », il existe deux résultats possibles : pile et face

Il est important de bien distinguer les cas possible des cas favorables, c'est-à-dire des cas que l'on veut obtenir.

Une épreuve est dite aléatoire lorsqu'on ne peut pas savoir avec certitude son résultat car elle est soumise au hasard.

2-Evénement :

Un événement est la réalisation d'un résultat possible à la suite d'une épreuve. On dit que cet événement est aléatoire, lorsque sa réalisation est soumise au hasard.

De tels événements seront par exemple :

- ✓ obtenir la valeur 5 en lançant un dé
- ✓ amener face en lançant une pièce de monnaie.

3-Notation ensembliste des événements :

En utilisant la notation ensembliste pour une épreuve aléatoire donnée, il sera possible de noter :

- l'ensemble Ω de tous les résultats possibles appelé ensemble fondamental ou univers.
- Les sous-ensembles de Ω, notés avec des lettres majuscules A, B, C,… représenteront les événements quand ils sont réalisés.
- Les complémentaires des ensembles notés $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}...$ représenteront les événements quand ils ne sont pas réalisés. On les appelle les évènements contraires.
- $A \cup B$ représentera le fait que l'évènement A ou l'évènement B est réalisé, c'est-à-dire au moins un des deux.

- A∩B représentera le fait que les évènements A et B sont réalisés simultanément
- Deux événements A et B qui ne peuvent pas se réaliser simultanément sont dits incompatibles et on a A∩B = Ø
- Ø représentera l'évènement impossible.
- Ω représentera l'évènement certain (sa réalisation est inévitable)
- Si l'évènement A implique l'évènement B c'est-à-dire si B est réalisé chaque fois que A est réalisé, on note $A \subset B$
- Si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors A = B, dans ce cas tous les deux se réalisent à la fois ou aucun des deux ne se réalisent.

Exemple 1 :

Considérons l'épreuve de « Lancer un dé », alors Ω = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

Soit les évènements suivants :

A= {apparition d'un numéro pair} = {2, 4, 6}

B= {apparition d'un numéro impair} = {1, 3, 5}

C= {apparition du numéro trois} = {3}

Alors on a : l'évènement C implique B car $C \subset B$

C est dit un évènement élémentaire

A et B sont deux événements incompatibles car A∩B = Ø

Exercice 1 :

Soient trois évènements. A, B et C définis sur une même épreuve. On demande de représenter à l'aide de la notation ensembliste :

1. A se réalise, B se réalise et C ne se réalise pas
2. A se réalise, B ne se réalise pas et C ne se réalise pas
3. parmi A, B, C deux évènements quelconques se réalisent et un ne se réalise pas.

Solution :

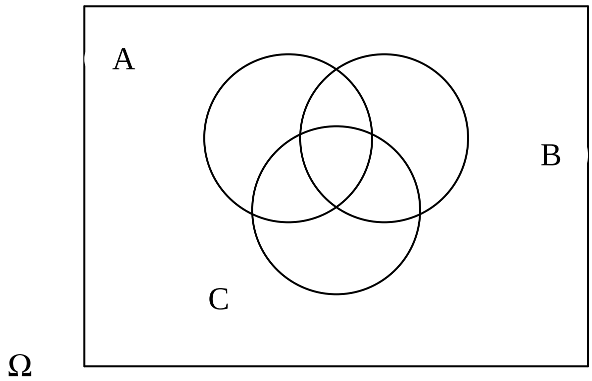
1. $A \cap B \cap \overline{C}$

   C qui ne se réalise pas est représenté par le complémentaire de C, c'est-à-dire l'évènement contraire. $\overline{C}$
2. $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
3. $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$

Puisque la proposition posée s'exprime de la façon suivante :

- soit A et B sont réalisés et C ne l'est pas.
- Soit A et C son réalisés et B ne l'est pas
- Soit B et C sont réalisés et A ne l'est pas,

le diagramme de Venn correspondant est le suivant :



II) Définitions de la probabilité :

1-Définition axiomatique de la probabilité :

Soit Ω l'ensemble fondamentale d'une épreuve aléatoire. Soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω, c'est donc l'ensemble de tous les évènements aléatoires. Alors à chaque évènement A de $\mathcal{P}(\Omega)$, on associe un nombre P(A) qui exprime le degré de possibilité de réalisation de l'évènement A, avec $0 \leq P(A) \leq 1$, appelé probabilité de l'évènement A et vérifiant les propriétés suivantes :

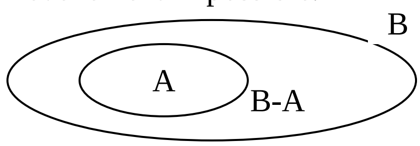
- $P(\Omega) = 1$
- Si A et B sont deux évènements incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

2-Conséquences :

① Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ on a : A et $\bar{A}$ sont deux évènements incompatibles, c'est-à-dire qu'ils ne se réalisent pas simultanément et que $A \cap \bar{A} = \varnothing$ alors $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$

② En particulier, $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$. La réciproque n'est pas toujours vraie : un évènement peut avoir la probabilité nulle sans qu'il soit l'évènement impossible.

③ Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.



En effet, comme $B = A \cup (B-A)$ puisque $A \subset B$

alors $P(B) = P(A \cup (B-A)) = P(A) + P(B-A)$ car $A \cap (B-A) = \varnothing$

Donc P (B) ≥ P (A)

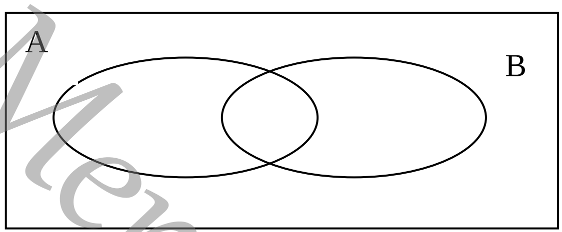
④ Probabilité de la réunion de deux évènements compatibles :

$$\mathbf{P\ (A \cup B) = P\ (A) + P\ (B) - P\ (A \cap B)}$$

En effet

on a

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$



De même $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) \Rightarrow P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$

Donc $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A})$

D'autre part, $A \cup B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

D'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

⑤ Une conséquence de la propriété autérieure est la sous-additivité de P. On a

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap)$

Alors $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

3- Définition fréquentielle de la probabilité :

Si, dans une épreuve aléatoire, un évènement A se réalise favorablement **n** fois, sachant qu'il existe **N** résultats possibles dans cette épreuve (n<N) la fréquence (relative) de A est

$f(A) = f(n,N) = \dfrac{n}{N}$ tend vers la probabilité de l'évènement A, si l'on répète un grande nombre de fois l'épreuve aléatoire.

On a donc $$\lim_{N \to \infty} f(A) = \lim_{N \to \infty} f(n,N) = P(A)$$

Selon cette définition, la probabilité d'un évènement A est le rapport du nombre de cas favorables au nombre de cas possible :

$$\boxed{P(A) = \frac{nombre\ de\ Cas\ \ favorables}{nombre\ de\ Cas\ \ possibles}}$$ (Règle de Laplace)

Ainsi, un problème de probabilité se ramènera souvent à un problème d'analyse combinatoire ou de dénombrement (des cas favorables et des cas possibles).

Remarque 1 :

Cette règle de Laplace donnée dans le cas des évènements équiprobables, c'est-à-dire que les évènements aléatoires incompatibles de l'épreuve considérée sont supposés avoir la même probabilité de réalisation.

Exemple 2 :

Soit l'épreuve « lancer une pièce de monnaie » Quel est la probabilité d'obtenir « face » ?
Il y a 2 cas possibles soit pile, soit face.

Et il y a un cas favorable, une face, donc P (face) = $\frac{1}{2}$

Exemple 1 (suite) :

Soit l'épreuve « lance d'un dé »

- Dé non truqué $\Rightarrow$ ses faces sont équiprobables la probabilité d'une face est $\frac{1}{6}$

Soit l'évènement B = {apparition d'un numéro impair}
= { 1, 3, 5 }

Alors on peut appliquer la règle de la place, Pour calculer la probabilité de B, on a

P (B) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ = Nbre de cas favorables/Nbre de cas possibles

Remarque 2 :

Les propriétés de la probabilité restent vérifiées pour cette définition fréquentielle, on a :

- le nombre de cas favorables est au plus égal au nombre de cas possibles ce qui permet d'établir l'inégalité suivante : $0 \leq n \leq N$

Cette inégalité implique que $0 \leq P(A) = \frac{n}{N} \leq \frac{N}{N} = 1$

- soit $\overline{A}$ l'évènement contraire de l'évènement A. le nombre de cas favorables à la réalisation de $\overline{A}$ est N- n. donc, sa probabilité est :

$$P(\overline{A}) = \frac{N-n}{N} = 1 - \frac{n}{N} 1 - P(A)$$

- de même pour les autres propriétés

Exercice2 :

Une urne contient 3 boules blanches et 4 noirs. On en tire au hasard une boule. Trouver la probabilité pour que celle-ci soit blanche.

Solution :

Soit l'évènement A= { apparition d'une boule blanche}dans cette épreuve le nombre total de cas possibles est égal à 7 et chaque boule est extraite avec la même probabilité (condition d'équiprobabilité). Le nombre des cas favorables à l'évènement A est égal à 3.

D'après la règle de la place $P(A) = \frac{3}{7}$

III) Probabilité conditionnelle :

1- Définition :

Soit un évènement A tel que P (A)>0.

La probabilité d'un évènement B calculée sous la condition que a A a été réalisé, que l'on note $P(B/A)$ s'appelle la probabilité conditionnelle de l'évènement B par l'évènement a et on a :

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$ Avec P(A)>0

Analogiquement, on peut définir

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ Avec P(B)>0

On déduit alors que

$$P(A \cap B) = P(B/A).P(A)$$

Et $P(A \cap B) = P(A/B) = P(B)$ Théorème des probabilités composées

2- Evènement dépendants et évènements indépendants :

On considère deux évènements A et B.

L'évènement A est dit indépendant de l'évènement B si Sa probabilité ne dépend pas de la réalisation ou de la non réalisation de B c'est-à-dire P(A/B)=P(A) dans le cas contraire ,si P(A/B) ≠P(A) ,l'événement A dépend de B .

La dépendance et l'indépendance des événements son t toujours mutuelles : si A ne dépend pas de B , B non -plus ne dépend pas de A et inversement.

Les événements A et B sont dits indépendants, si l'apparition de l'un d'eux n'influe pas sur la probabilité de l'apparition de l'autre.

Le théorème des probabilités composées acquiert une forme particulièrement simple lorsque les événements qui constituent le produit sont indépendants :

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$

3-Conséquence :

Si A et B sont deux évènement indépendants alors il en est de même de $\overline{A} et \overline{B}$

En effet :

Il suffit de montrer que : $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B})$.

On sait que $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ (Loi de Morgan)

Donc
$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \end{aligned}$$

Mais, comme A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

D'où
$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A).P(B)] \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= (1 - P(A))(1 - P(B)) \\ &= P(\overline{A}).P(\overline{B}). \end{aligned}$$

Remarque :

La notion d'indépendance joue un rôle fondamental dans la théorie des probabilités et ses applications.
La majorité des résultats en probabilités s'obtiennent sous l'hypothèse d'indépendance .

4-Théorème de la probabilité totale et théorème de Bayes :

1) théorème de la probabilité totale :

Soient les événement A1, A2 …….An qui constituent une partition de c'est a dire

$$A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n = \Omega$$
$$A_i \cap A_j = \phi$$
$$\forall i, j \in \{1,2,....,n\}; i \neq j$$

Soit B un événement quelconque. Alors on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/Ai).P(Ai)$$

<u>Théorème de la probabilité totale</u>

Remarque :

On emploie le théorème de la probabilité totale pour calculer la probabilité d'un événement B dans les problèmes dont l'issue aléatoire a « deux étapes », la

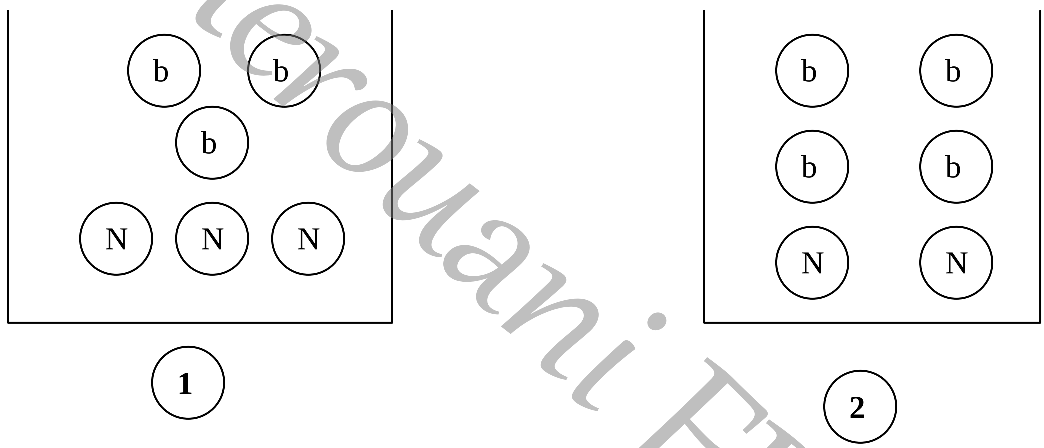
Exercice :

(Exemple d'application du théorème de la probabilité total)

On considère deux cernes ; la première contient 3 boules blanches et 3 noirs et la seconde 4 blanches et 2 noires.

On choisit l'une des deux urnes au hasard t on tire sans remise 2 boules de cette urne.

Calculer la probabilité que les 2 boules tirées soient blanches.



Solution :

Soient les événements :

U_1 : « Le tirage se fait dans l'urne ① »

U_2 : « Le tirage se fait dans l'urne ② »

B : « les 2 boules tirées sont blanches »

D'après le théorème de la probabilité totale :

$$P(B) = \sum_{1=1}^{2} P(B/U_i).P(U/i) = P(U_1).P(U_1) + P(B_{U_2})P$$

Or $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$

$$P(B/U_1) = \frac{3}{6}.\frac{2}{5}$$

$$P(B/U_2) = \frac{4}{6}.\frac{3}{5}$$

Probabilité de tirage de la 2eme boule

Probabilité de tirage de la première boule

Donc $P(B) = (\frac{3}{6}.\frac{2}{5}).\frac{1}{2} + (\frac{4}{6}.\frac{3}{5}).\frac{1}{2} = 0{,}3$

Démonstration du théorème des probabilités totales :

On a $A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n = \Omega$

Et $A_i \cap A_j = \phi$ pour $i \neq j$

$$B = B \cup \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup ..... \cup A_n)$$

Comme $= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup .....U(B \cap A_n)$

$$avec(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \phi; \forall i \neq j$$

$$P(B) = P\left[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ..... \cup (B \cap A_n)\right]$$

on a $= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$

$$= P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + ... + P(B/A_n)P(A_n)$$

C'est-à-dire $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)P(A_i)$

<u>Démonstration du théorème de BAYES :</u>

On a : $\forall K; P(A_k / B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/A_k).P(A_k)}{P(B)}$

Alors le théorème de la probabilité total, noue permet d'écrire

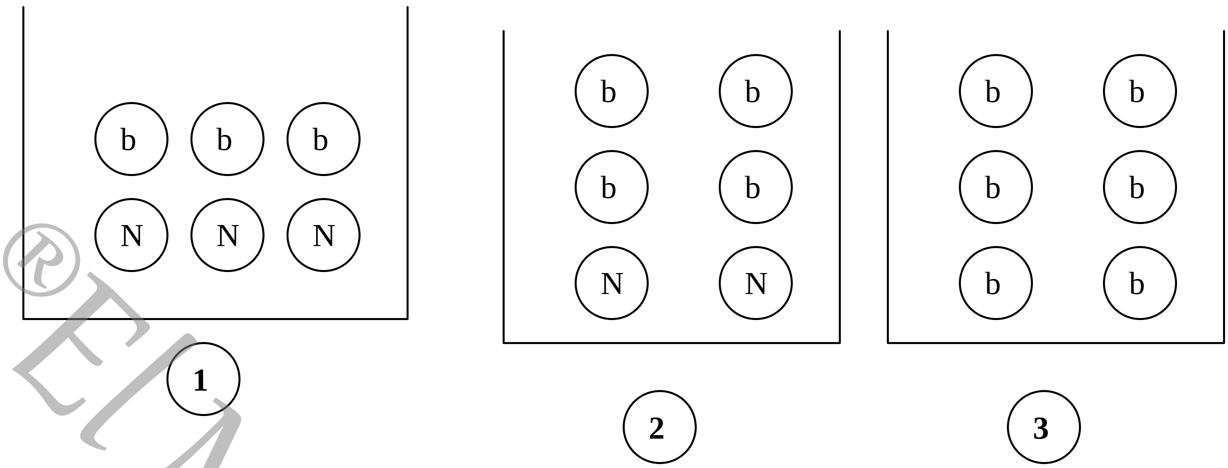
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i).p(A_i)$$

D'où $P(A_K / B) = \frac{P(B/A_K).P(A_K)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i).P(A_i)}$

Exercice :

On considère trois urnes ; la première contient 3 boules blanches et trois noirs, la seconde 4 blanches et deux noires et la 3^{eme} 6 blanches. On choisit l'une des trois urnes au hasard et on tire simultanément deux boules de cette urne sachant que les deux boules extraites sont blanches, calculer la probabilité quelle provienne de la deuxième urne.

Solution :



Soient les événements :
U_1 : « le tirage se fait dans la première urne »
U_2 : « le tirage se fait dans la deuxième urne »
U_3 : « le tirage se fait dans la troisième urne »
B : « les deux boules tirées sont blanches »
On à d'après le théorème de BAYES :

$$P(U_2/B)=\frac{P(B/U_2).P(U_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B/U_i)P(U_i)}$$

$$P(U_1)=P(U_2)=P(U_3)=\frac{1}{3}$$

$$P(B/U_1)=\frac{3}{6}.\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

$$P(B/U_2)=\frac{4}{6}.\frac{3}{5}=\frac{2}{5} et P(B/U_3)=\frac{6}{6}.\frac{5}{5}=1$$

On trouve :

$$P(U_2/B)=\frac{1/3}{\frac{1}{5}.\frac{1}{3}+\frac{2}{5}.\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=0,25$$

Première étape met en jeu les conditions de l'épreuve et la deuxième, la réalisation on la non-réalisation de l'événement B.

6- Théorème de BAYES :

Les probabilités conditionnelles d'un événement quelconque B tel que P (B) ≠ rapport à chacun des éléments de la partition ; P (B/Ai), sont généralement données dans les problèmes. Mais, les probabilités du type P (Ai/B) ne le sont pas .Pour les calculer, on utilise le théorème de BAYES :

$$P\left(A_k / B\right) = \frac{P(B/A_k).P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i).P(A_i)}$$

Remarque :

Les probabilités P(Ai) , P(A2),……,P(An). Sont les probabilités avant l'épreuve aléatoire (elles sont appelées de probabilité à priori).

Après avoir réalisé l'épreuve, supposons qu'il en résulte l'événement B et que l'on connaît ses probabilités conditionnelles P(B/A1),….,P(B/An)(elles sont appelées des vraisemblances).
Le théorème de BAYES nous donne, donc, les probabilités après l'épreuve (elles sont appelées des probabilité à posteriori) conditionnelles par rapport à l'événement B qui en résulte, P(A1/B),….,P(A1/B).