Page 102

XV :- 1) Soit un intervalle $[a,b] \subset [0,+\infty[$

(donc a et $b \in \mathbb{R}^+$)

et soit $f(x) = \text{Arctg}\, x$,

la formule ou le théorème des accroissements finis pour f sur $[a,b]$ s'écrit : $\exists c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

$$\Rightarrow \quad \text{Arctg}(b) - \text{Arctg}(a) = (b-a)\frac{1}{1+c^2}$$

2) On prend maintenant $a = 0$ et $b = t \geq 0$

alors $\quad \text{Arctg}\, t - \text{Arctg}\, 0 = \dfrac{(t-0)}{1+c^2}$

$$\Rightarrow \quad \text{Arctg}\, t = \frac{t}{1+c^2}$$

Mais la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est strictement $\searrow$ sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit immédiatement que

$$\text{Arctg}\, t \geq \frac{t}{1+t^2} \quad \text{pour } t \geq 0$$

3) D'après 1) on a :

$$\frac{\text{Arctg}(b) - \text{Arctg}(a)}{b-a} = \frac{1}{1+c^2} \quad \text{avec } c \in]a,b[$$

On pose $a = 1+x$ et $b = e^x$ et on a $1 + x < c < e^x$

alors $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\text{Arctg}(e^x) - \text{Arctg}(1+x)}{e^x - 1 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+c^2}$

$$= \frac{1}{2}$$