Université Abdelmalek Essaâdi	**Année Universitaire : 2005/2006**
Faculté Polydisciplinaire	**Filière : Sc. Eco. & Gestion**
Tétouan	**Semestre : Troisième (S 3)**

Module : Méthodes quantitatives II
Elément : Mathématiques II
Enseignant : M. El Merouani

Contrôle Continu n°1 (Durée 2 heures)

Dans tout ce contrôle I indique la matrice identité $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Exercice n°1 :

Déterminer le rang de la matrice $M=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&-1\\2&-2&2\end{pmatrix}$.

M est-elle inversible ? Justifier votre réponse.

Exercice n°2 :

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est une matrice symétrique.
2. Calculer A^2 et vérifier $A^2=A+2I$
3. En déduire que A est inversible et exprimer la matrice inverse A^{-1} en fonction de A et de I.

Exercice n°3 :

Soit la matrice $B=\begin{pmatrix}0&-2&-1\\1&-3&4\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de B. En déduire que B est inversible et calculer son inverse B^{-1}
2. On se propose de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x-y=2\\ 2x+3y+4z=4\\ x-4y+z=3\end{cases}$$

   a) Donner l'écriture matricielle de ce système.
   b) Résoudre ce système.

Exercice n°4 :

On considère les matrices $P=\begin{pmatrix}1&-4&1\\1&3&-2\\-1&2&0\end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\-1&1&2\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

1. Calculer les produits matriciels PQ et QP.
2. Déterminer la matrice R qui vérifie $(2P+I)Q=Q+PRP$.

Correction de C.C. 1

Maths II

Exercice n° 1 :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

rang de M ?

$$\det M = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4(2-2) = 0$$

donc $rg(M) < 3$.

* Un déterminant d'ordre 2 extrait de det M est

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4 \neq 0$$

donc $rg(M) = 2$

M n'est pas de plein rang, donc elle n'est pas inversible, d'ailleurs on a trouvé que $\det M = 0$.

Exercice n° 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1°/ ${}^tA = A \iff A$ est symétrique.

2°/ $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I$

3°/ On peut donc écrire $\frac{A^2 - A}{2} = I$, i.e

$A\left(\frac{A - I}{2}\right) = I$

ce qui montre que A est inversible et que

$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(En effet, A et $\frac{A - I}{2}$ commutent, il suffit donc de regarder ce qui se passe à droite !)

Exercice n° 3 :

$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

1°/

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1+4) - (-1-3)$$

$$= 2 \times 3 + 4 = 10 \neq 0$$

donc B est inversible

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\, {}^t\mathrm{com}\, B = \frac{1}{\det}\, {}^t(\Delta_{ij})$$

$$\mathrm{Com}\, B = (\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -1 & +1 & 2 \\ -11 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3

$$B^{-1} = \frac{1}{10}\ {}^{t}\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ -1 & +1 & +2 \\ -11 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -1 & -11 \\ -3 & +1 & -1 \\ +4 & +2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -1/10 & -11/10 \\ -\frac{3}{10} & +1/10 & -1/10 \\ +\frac{2}{5} & -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

2°)

$$\begin{cases} x - y = 2 & (1) \\ 2x + 3y + 4z = 4 & (2) \\ x - 4y + z = 3 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \Big\{$$

a)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{K}$$

(3) − (1)

$$\Rightarrow \boxed{-3y + z = 1}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3+16) + (2-4) = 19 - 2$$
$$= 17 \neq 0$$

4

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t(\Delta_{ij})$$

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 19 & 2 & -11 \\ 1 & 1 & 3 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 19 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \\ -11 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}.K = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 19 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \\ -11 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 38+4-12 \\ 4+4-12 \\ -22+12+15 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 30 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice n°4 :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -5 & -8 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$QP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -2 & 11 & -3 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$PQ \neq QP$ - le produit matriciel n'est pas commutatif

2°/ $\det P = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$\det P = -(8-3) - 2(-2-1) = -5+6 = 1 \neq 0$

6

donc P^{-1} existe

$$2PQ + Q = Q + PRP$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2PQ = PRP$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2Q = RP$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{2QP^{-1} = R}$$

P^{-1} ?

$$(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, {}^{t}(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$R = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$R = 2 \begin{pmatrix} -7 & -1 & -10 \\ 16 & 1 & 12 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -2 & -20 \\ 32 & 2 & 24 \\ 18 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$