Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
Tétouan

Année Universitaire 2005/2006
Filière : Sc. Éco. & Gestion
Semestre : Troisième (S3)
Module : Méthodes Quantitatives II
Élément : **Mathématiques II**

Contrôle continu final
(Durée 2 heures)

Problème n° 1:

On considère les vecteurs de l'espace IR^3 :

$U = (a,\, 0,\, b)$; $V = (0,\, a,\, c)$ et $W = (0,\, 0,\, d)$ où a, b, c et d sont des réels quelconques.

1. A quelles conditions sur les réels a, b, c et d, les vecteurs U ; V et W forment une base de l'espace vectoriel IR^3 ?
2. A quelles conditions sur les réels a, b, c et d, la famille $\{U, V, W\}$ est une base orthonormée ?

Problème n° 2:

Soit $M_3(IR)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels et soit $A = \left\{ M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \in M_3(IR) / \alpha, \beta, \gamma \in IR \right\}$

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $M_3(IR)$.
2. A quelle condition la matrice $M \in A$, est-elle inversible ? Déterminer alors la matrice M^{-1} Voir si $M^{-1} \in A$ et à quelle ~~condition~~ ?
3. Déterminer un système générateur de A.
4. Démontrer que le système générateur trouvé est libre.
5. En déduire une base de A. Quelle est la dimension de A ?

Problème n° 3:

On considère les ensembles $F = \{(x, y, z) \in IR^3 / z + y + x = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in IR^3 / y + x = 2z\}$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de IR^3.
2. Donner une base de F et une base de G
3. Déterminer le sous espace vectoriel $F \cap G$ et en donner une base.
4. Quelle est la dimension de F, de G et de $F \cap G$.

Que remarque-t-on ?

Bonne chance !

Pb 1:

$U = (a, 0, b) \quad ; \quad V = (0, a, c) \quad ; \quad W = (0, 0, d)$

1°/ $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = d \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2 d \neq 0$

$\begin{matrix} + & - & + \end{matrix}$

$\Longleftrightarrow a \neq 0$ et $d \neq 0$

b et c quelconques

2°/ orthogonalité :

$U \cdot V = bc = 0 \Longleftrightarrow b = 0$ ou $c = 0$

et

$U \cdot W = bd = 0 \Longleftrightarrow b = 0$ $\left[\text{ou } d = 0\right]$ car $d \neq 0$

et

$V \cdot W = dc = 0 \Longleftrightarrow \left[d = 0 \text{ ou}\right]$ $c = 0$ car $d \neq 0$

Conclusion : $\boxed{b = 0 \text{ et } c = 0}$

Unitaires :

$\|U\|^2 = a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1$

$\Rightarrow a = \pm 1$

$\|V\|^2 = a^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

$\|W\|^2 = d^2 = 1 \Rightarrow d = \pm 1$

Conclusion : $\boxed{a = \pm 1 \text{ et } d = \pm 1}$

Pb 2:

$$A = \left\{ M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} / \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

1°/ • $A \subset M_3(\mathbb{R})$ (par déf)

• $A \neq \emptyset$ car $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in A$

• Soient $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}$; $M_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$

$x, y \in \mathbb{R}$

$$x M_1 + y M_2 = \begin{pmatrix} x\alpha_1 + y\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & x\beta_1 + y\beta_2 & 0 \\ x\alpha_1 + y\alpha_2 & x\beta_1 + y\beta_2 & x\gamma_1 + y\gamma_2 \end{pmatrix}$$

de la forme des matrices de A

c.q.f.d.

2°/

$$\det M = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = \gamma \alpha \beta$$

$\det M \neq 0 \iff \alpha \neq 0$ et $\gamma \neq 0$ et $\beta \neq 0$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t\mathrm{Com}\, M.$$

$$\mathrm{Com}\, M = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} \beta & 0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & \gamma \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Com}\, M = \begin{pmatrix} \beta\gamma & 0 & -\alpha\beta \\ 0 & \alpha\gamma & -\alpha\beta \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \begin{pmatrix} \beta\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\gamma & 0 \\ -\alpha\beta & -\alpha\beta & \alpha\beta \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1/\beta & 0 \\ -\frac{1}{\gamma} & -\frac{1}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} \in A \iff \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\gamma} \text{ et } \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{\gamma}$$

$$\iff -\gamma = \alpha \text{ et } \beta = -\gamma$$

$$\iff \boxed{\alpha = \beta = -\gamma}$$

3°/ Une base de A :

Un système générateur de A :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$M = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

générateur de A.

S libre ?

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$\iff$ S libre.

$\ldots A = \text{Card } S = 3$

Pb 3 :

1°/ F s. e. v. de $\mathbb{R}^3$:

* $F \subset \mathbb{R}^3$ (par sa définition)
* $F \neq \phi$ (car $(0,0,0) \in F$ puisque $0+0+0=0$)
* $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$

soit (x,y,z) ; $(x',y',z') \in F$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z') = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y', \alpha z + \beta z')$

donc $\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y' + \alpha z + \beta z' =$

$= \alpha(x+y+z) + \beta(x'+y'+z') = 0$

G s. e. v. de $\mathbb{R}^3$:

* $G \neq \phi$ (car $0+0 = 2\times 0$ par suite $(0,0,0) \in G$)
* $G \subset \mathbb{R}^3$ (par sa déf.).

t (x,y,z) ; $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$

soit $\alpha ; \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(x,y,z) + \beta(x',y',z') = (\alpha x+\beta x', \alpha y+\beta y', \alpha z+\beta z')$$

$$(\alpha y+\beta y') + (\alpha x+\beta x') = \alpha(x+y) + \beta(x'+y')$$

$$= \alpha(2z) + \beta(2z')$$

$$= 2(\alpha z + \beta z')$$

G s.e.v de $\mathbb{R}^3$

2°) base de F :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = -y-z\}$$

$$F = \{(-y-z, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y, z \in \mathbb{R}\}$$

Alors un élément de F est de la forme :

$$(-y, y, 0) + (-z, 0, z)$$

$$= y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$

$S_F = \{(-1, 1, 0) ; (-1, 0, 1)\}$ générateur de F et il est libre donc S_F base de F

6

même pour G

$$G = \{(2z-y, y, z) \;/\; y, z \in \mathbb{R}\}$$

d'où $X \in G$

$$X = (-y, y, 0) + (2z, 0, z)$$

$$= y(-1, 1, 0) + z(2, 0, 1)$$

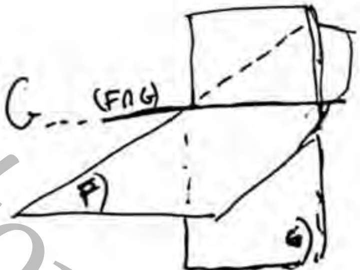
$S_G = \{(-1, 1, 0) ; (2, 0, 1)\}$ base de G

3°/ $F \cap G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z=0 \text{ et } x+y=2z\}$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$$

$$F \cap G = \{(x, -x, 0) \;/\; x \in \mathbb{R}\}$$

$S_{F\cap G} = \{(1, -1, 0)\}$ base de $F \cap G$



4°/ $\dim F = 2$ et $\dim F \cap G = 1$

$\dim G = 2$

Rq: L'∩ de deux plans et une plan si l'un est inclu dans l'autre sinon c'est l'∅ si il sont parrallèle ou une droite s'il ne le sont pas.

7