Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
Tétouan

Année Universitaire : 2008/2009
Filière : Sc. Éco. & Gestion
Semestre : Troisième (S3)
Module : Méthodes Quantitatives II
Élément : Mathématiques II

Contrôle de rattrapage
(Durée 1 heure)

Exercice 1 :

On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est inversible.
2) Calculer les matrices A^2 et A^3.
3) Montrer, en calculant $A^3 - 3A^2 + 3A$, que les matrices I, A, A^2 et A^3 forment un système lié dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3.

Donner la relation linéaire qui existe entre les matrices A, A^2, A^3 et la matrice identité I.

4) Montrer que la relation précédente permet d'exprimer A^{-1} en fonction de I, A et A^2.
5) En déduire la matrice A^{-1}.

Exercice 2 :

Soit $M = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de M.
2) M est-elle diagonalisable ?

Maths I

Rattrapage 2^e énoncé

Ex. 1 :

1) $\det A = 1 \neq 0 \Rightarrow$ A est inversible.

2) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

3) $A^3 - 3A^2 + 3A = I$

d'où $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$

Donc le système $\{I, A, A^2, A^3\}$ est lié dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3.

4) $\boxed{A^{-1} = A^2 - 3A + 3I}$

1

5) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ex. 2 :

1) L'éq. caractéristique est :

$$\lambda(\lambda-1)^2 = 0$$

donc, les valeurs propres sont :

$0, 1$

les sous-espaces propres sont

$\lambda = 0$

$E_0 = \{(x, 0, 2x) / x \in \mathbb{R}\}$

$\lambda = 1$

$E_1 = \{(x, 2x, -x) / x \in \mathbb{R}\}$

2) $\dim E_0 = 1$

$\dim E_1 = 1$

$\dim E_0 + \dim E_1 = 2 < 3$

$\Rightarrow$ M n'est pas diagonalisable