Propriétés des fonctions équivalentes

Prof. Mohamed El Merouani

Propriété 1 :

$$\left.\begin{array}{lll} f & \sim_{x_0} & g \\ h & \sim_{x_0} & k \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} fh & \sim_{x_0} & gk \\ \frac{f}{h} & \sim_{x_0} & \frac{g}{k} \end{array}\right.$$

Propriété 2 :

1.
$$\left.\begin{array}{lll} f & \sim_{x_0} & g \\ \lim\limits_{x\to x_0} & g(x) & \text{existe} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to x_0} & f(x) & \text{existe} \\ \lim\limits_{x\to x_0} & f(x) = & \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \end{array}\right.$$

2.
$$\left.\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & \text{et} \lim\limits_{x\to x_0} g(x) & \text{existent} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = & \lim\limits_{x\to x_0} g(x) & \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \sim_{x_0} g$$

Remarque :
Il n'existe pas une propriété relative à la somme et la différence des fonctions équivalentes, c'est-à-dire, si

$$\left.\begin{array}{lll} f & \sim_{x_0} & g \\ h & \sim_{x_0} & k \end{array}\right\} \text{alors on n'a pas nécessairement} f \pm h \sim_{x_0} g \pm k$$

Exemple :

$$\left.\begin{array}{lll} x & \sim_0 & x + x^2 \\ -x - x^2 & \sim_0 & -x + x^2 \end{array}\right\} \quad \text{mais} \quad x + (-x - x^2) = -x^2 \quad \text{n'est pas équivalente à}$$

$(x + x^2) + (-x + x^2) = 2x^2$ au voisinage de zéro.

<u>Quelle relation de "$\sim$" avec "o" :</u>

$$f \sim_{x_0} g \Longleftrightarrow f - g = o(g) \quad \text{au voisinage de} \quad x_0$$

ou encore :

$$f \sim_{x_0} g \Longleftrightarrow f - g = h \quad \text{avec} \quad h = o(g) \quad \text{au voisinage de} \quad x_0$$

Exemple :

On a vu que $Log(x+1) \sim_0 x$ alors $Log(x+1) - x = o(x)$, au voisinage de 0 parce que

$$\lim_{x\to 0} \frac{Log(x+1) - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} - 1 = 0$$