Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique
Pr. Mohamed El Merouani

Année Universitaire: 2009-2010
Filière: Sc. éco. & Gestion
Semestre: deuxième (S2)
Date: 31/05/2010

Contrôle Final
Module: Méthodes Quantitatives II
Elément de module: Analyse Mathématique II
Durée: 2 heures

Exercice 1:

Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$I=\int \frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}dx \quad ; \quad J=\int \frac{5x-1}{(x+2)^2(x^2-1)}dx \quad \text{et} \quad K=\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$$

Exercice 2:

1. Donner un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $f(x)=\frac{tg\, x}{x}$.
2. Donner un développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction définie par $g(x)=\text{Log}\ (\frac{tg\, x}{x})$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{tg\, x}{x})^{\frac{1}{x}}$

Exercice 3:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par:

$u_{n+1}=\sin(u_n)$ et $u_0=1$

1. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}), 0\leqslant u_n\leqslant 1$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4:

On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par:

$$g(x)=\frac{2x^2}{e^x-e^{-x}} \quad \text{pour} \quad x\neq 0 \quad \text{et} \quad g(0)=0 .$$

1. Donner le développement limité de g, à l'ordre 3, au voisinage de 0.
2. Montrer que g est continue et dérivable en 0. Que vaut $g'(0)$?
3. Préciser la position de la courbe représentative de g par rapport à sa tangente en 0.

On donne les développements limités suivantes au voisinage de 0:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o(x^{2p+2})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^p\frac{x^{2p}}{2p!}+o(x^{2p+1})$$

Bon courage!

Exercice 1 :

- $$K = \int \frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}\,dx$$

La décomposition en éléments simples est du type

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}$$

Multiplions les deux membres par x et remplaçons ensuite x par 0 on obtient $a = -\frac{1}{2}$

Multiplions les deux membres par $x-1$ et remplaçons ensuite x par 1 ; on obtient $b = \frac{2}{3}$

Enfin, multiplions les deux membres par $x+2$ et remplaçons ensuite x par -2 ; on obtient $c = -\frac{1}{6}$

La décomposition est entièrement déterminée.

Passons alors au calcul de la primitive

$$K = \int \frac{x+1}{x(x-1)(x+2)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{Log}|x| + \frac{2}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log|x+2| + C$$

- $J = \int \frac{5x-1}{(x+2)^2(x^2-1)}dx$

La décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{5x-1}{(x+2)^2(x^2-1)} = -\frac{11}{3(x+2)^2} - \frac{29}{9(x+2)} + \frac{3}{x+1} + \frac{2}{9(x-1)}$$

d'où en intégrant chaque élément

$$I = \frac{11}{3(x+2)} - \frac{29}{9}\,\mathrm{Log}|x+2| + 3\,\mathrm{Log}|x+1| + \frac{2}{9}\,\mathrm{Log}|x-1| + C$$

- $K = \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$

La décomposition de la fraction a intégrer en éléments simples est de type :

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a(x^2+1)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{ax^2+a+bx^2-bx+cx-c}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow (a+b)x^2 + (c-b)x + a-c = x+1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c-b=1 \\ a-c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-b \\ b=c-1 \\ a=1-c \end{cases} \text{ ou } c=1-a$$

$$\Rightarrow a=-b=1-c$$

Si on donne à a la valeur 1, alors

$a=1$, $b=-1$ et $c=0$

La décomposition sera

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1}$$

Alors

$$K = \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1}$$

$$= \text{Log}|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

C est une constante.

Exercice 2 :

le D.L de la fonction tg on le trouve (comme fait dans le cours + T.D) par division suivant les puissances croissantes de ~~D.L~~. de sin x par celui de cos x, on trouve

$$tg\, x = x + \frac{1}{3} x^3 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \frac{tg\, x}{x} = 1 + \frac{1}{3} x^2 + o(x^3)$$

et le D.L log$(1+x)$ on le trouve à partir de celui de $\frac{1}{1+x}$ par intégration.

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2)$$

on pose $X = \frac{1}{3} x^2$

$$\log\left(\frac{tg\, x}{x}\right) = X - \frac{1}{2} X^2 + o(X^2) = \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} x^2\right)^2 + o(x^4)$$

donc $$\log\left(\frac{tg\, x}{x}\right) = \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{18} x^4 + o(x^4)$$

or $$\left(\frac{tg\, x}{x}\right)^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\log\left(\frac{tg\, x}{x}\right)} = e^{\frac{1}{3}x - \frac{1}{18}x^3 + o(x^3)}$$

On a $$\left(\frac{tg\, x}{x}\right)^{1/x} = 1 + \frac{1}{3} x + \frac{1}{18} x^2 + \frac{34}{405} x^3 + \frac{257}{9720} x^4 + o(x^4)$$

et $$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{tg\, x}{x}\right)^{1/x} = 1$$

Exercice 3 :

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \sin U_n \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

1°) Une récurrence facile montre que $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 \leq u_n \leq 1$:
en effet, c'est vrai pour $n=0$ $(u_0 = 1 \in [0,1])$.
De plus, si $u_n \in [0,1]$, on a donc à fortiori : $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$
Ainsi $u_{n+1} = \sin u_n \in [0,1]$ c.q.f.d

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \leq u_n \leq 1$

2°) On étudie $f(x) = \sin x$ sur $[0,1]$:
$f'(x) = \cos x > 0$; $(\forall x \in [0,1])$
d'où le fait que f est croissante sur $[0,1]$.
Par théorème de cours il s'ensuit que $U_{n+1} = f(u_n)$ est monotone et comme $U_0 = 1 > U_1 = \sin U_0 = \sin 1$, on a

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

3°) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée (par 0), elle converge.
Pour trouver la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il suffit d'étudier
$g(x) = f(x) - x = \sin x - x$ sur $[0,1]$

On a $g'(x) = \cos x - 1 \leq 0$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

donc g est décroissante.

Le tableau de variations de g montre clairement que seule la valeur 0 vérifie $g(x)=0$ c'est-à-dire $f(x)=x$

x	0	1
$g'(x)$	$-$	
g	0 ↘	$(\sin 1 - 1) < 0$

il reste alors à conclure : $f(x) = \sin x$ étant continue sur $[0,1]$, la suite récurrente $u_{n+1} = \sin u_n$ admet pour limite $l = 0$, seule valeur vérifiant $f(l) = l$.

Exercice 4 :

pour $x \neq 0$ $\quad g(x) = \dfrac{2x^2}{e^x - e^{-x}}$

1°) Au voisinage de 0, on a :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

et $$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Alors $e^{x} - e^{-x} = \frac{2x}{1!} + \frac{2x^{3}}{3!} + o(x^{3})$

et on fait la division suivant les puissances croissantes de x^{2} par $x + \frac{x^{3}}{6}$, on aura :

$$\begin{array}{l|l}
x^{2} & x + \frac{x^{3}}{6} \\
\cline{2-2}
-\left(x^{2} + \frac{x^{4}}{6}\right) & x - \frac{x^{3}}{6} + \frac{x^{5}}{36} \\
\cline{1-1}
-\frac{x^{4}}{6} & \\
-\left(-\frac{x^{4}}{6} - \frac{x^{6}}{36}\right) & \\
\cline{1-1}
\frac{x^{6}}{36} &
\end{array}$$

D'où $g(x) = x - \frac{x^{3}}{6} + o(x^{3})$ au voisinage de 0.

2°) <u>Continuité en 0 :</u>

g est continue en 0 ssi $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \left[x - \frac{x^{2}}{6} + o(x^{3}) \right] = 0 = g(0)$$

d'où g est continue en 0.

Dérivabilité en 0 :

g est dérivable en 0 ssi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ existe

et on a $g'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right]$$

$$= 1$$

Donc g est dérivable en 0 et on a $\underline{g'(0) = 1}$

3. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en 0 s'écrit :

$$y = g'(0)\,x + g(0) \iff y = x \quad (1^{\text{er}} \text{ bissectrice})$$

Donc, pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_g$ et $y = x$ on étudie le signe de $g(x) - x$

or $g(x) - x = -\dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$

et on a :

$$\lim_{x \to 0^+} (g(x) - x) = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} (g(x) - x) = 0^+$$

Conclusion : La courbe représentative de g est au dessus de la tangente en 0 pour $x < 0$ et au-dessous de cette tangente pour les $x > 0$.