Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
Département de Statistique et
Informatique
Tétouan

Année Universitaire 2006/2007
Filière : Sc. Éco. & Gestion
Semestre : Deuxième (S2)
Module : Méth. Quantita. 1
Enseignant : M. El Merouani

Contrôle final de Statistique I
(Durée 2 heures)

Problème n° 1:

La distribution des salaires horaires, en dirhams, des **N** employés d'une grande entreprise est donnée par :

Classes	Effectifs
[50 ; 100[	10
[100 ; 150[	14
[150 ; 200[	16
[200 ; 250[	**n**

Ces données sont incomplet car, à la suite d'un incident, l'effectif de la dernière classe est illisible ; alors, on a décidé de le noter provisoirement par **n**. Mais, on sait que la **médiane** de cette série statistique est **153,125 DH**.

1. Exprimer la moyenne arithmétique de cette distribution en fonction de **n**.
2. Exprimer la médiane de cette série statistique en fonction de **n**, sachant que la valeur **N/2** n'a pas été trouvée exactement parmi les effectifs cumulés croissants.
   Déterminer **n** et puis **N** le nombre d'employés de cette entreprise.
3. Retrouver la valeur numérique de la moyenne arithmétique en remplaçant la valeur de **n** trouvée dans l'expression de la moyenne exprimée en 1°.
4. Calculer la médiale de cette série statistique.
5. Représenter la courbe de concentration (ou courbe de Lorenz).
6. Calculer l'indice de concentration (ou indice de GINI) et conclure.

Problème n° 2:

1. Citer les différents types de moyennes et classer-les par ordre croissant.
2. Donner l'expression de la moyenne généralisée d'ordre **r**.
   Pour quelles valeurs de **r** on retrouve chaque moyenne citée à la 1ère question précédente ?
3. Le chiffre d'affaire d'une entreprise a subit les augmentations annuelles suivantes :

Année	Augmentation en %
2002	4%
2003	5%
2004	6%
2005	5%
2006	4%

Calculer son taux de croissance moyen.

Problème n°2 :

1. Les différents types de moyennes :

* *Moyenne arithmétique :* $\overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

* *Moyenne géométrique :* G

$$G = \sqrt[N]{x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}}$$

avec $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$

* *Moyenne harmonique :* H

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}}$$

* *Moyenne quadratique :* Q

$$Q = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}$$

et on a $H \leq G \leq \overline{X} \leq Q$

2. Moyenne généralisée d'ordre r : M_r

$$M_r = \sqrt[r]{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^r}$$

* On retrouve la moyenne arithmétique pour $\boxed{r=1}$

  c'est-à-dire $\boxed{M_1 = \bar{x}}$

* la moyenne géométrique pour $\boxed{r \longrightarrow 0}$

  c'est-à-dire $\boxed{G = M_0 = \lim_{r \to 0} M_r}$

* la moyenne harmonique pour $\boxed{r = -1}$

  c'est-à-dire $\boxed{H = M_{-1}}$

* la moyenne quadratique pour $\boxed{r=2}$

  c'est-à-dire $\boxed{M_2 = Q}$

3. L'augmentation annuelle moyenne est donnée par :

$$G = \sqrt[5]{(1{,}04)^2(1{,}06)(1{,}05)^2} \quad \text{(moyenne géométrique)}$$

$$G \simeq 1{,}048$$

Soit un taux de croissance de 4,8 % approximativement

3

1°) $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum n_i x_i = \frac{1}{N}\sum n_i c_i$

$$\overline{X} = \frac{750 + 1750 + 2800 + 225n}{40+n}$$

$$\boxed{\overline{X} = \frac{5300 + 225n}{40+n}}$$

2°)

$[e_{i-1}, e_i[$	n_i	$n_{ic}\uparrow$
[50,100[	10	10
[100,150[	14	24
[150,200[	16	40
[200,250	n	40+n
	$\boxed{N = 40+n}$	

$Mé = 153,125 \in [150, 200[$

$$Mé = 150 + \frac{\frac{40+n}{2} - 24}{16} \times 50$$

$$Mé = 150 + \frac{20 + n/2 - 24}{16} \times 50$$

Mais $Mé = 153,125$

$\Rightarrow \boxed{n = 10}$

④

$\Rightarrow N = 50$

3°) $\bar{X} = \dfrac{5300 + 225 \times 10}{50}$

$\boxed{\bar{X} = 151}$

4°) Médiale :

c_i	n_ic_i	$(n_ic_i)c\uparrow$
75	750	750
125	1750	2500
175	2800	5300 *
225	2250	7550

$\dfrac{7550}{2} = 3775$

$[150, 200[$

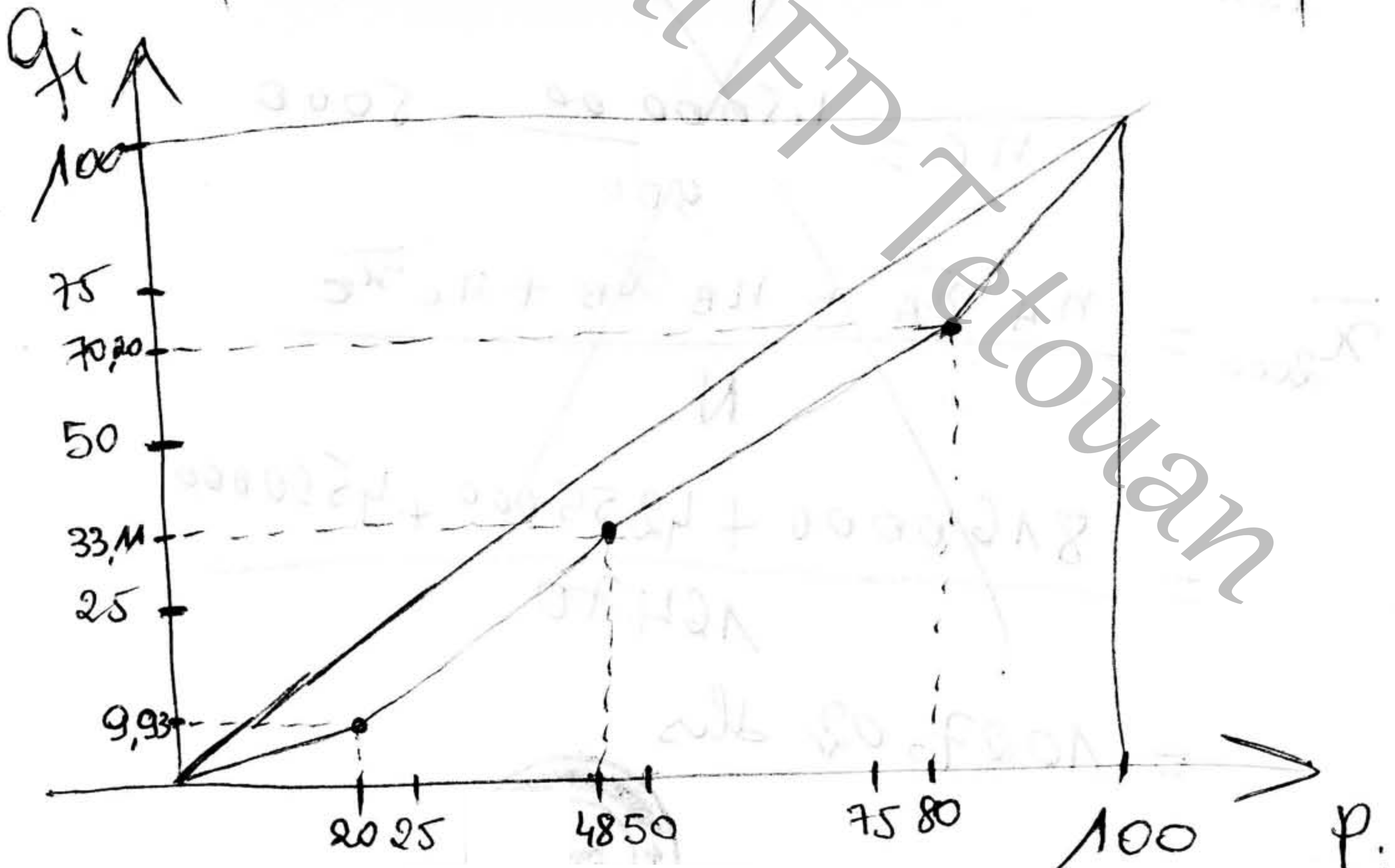
$Ml = e_{i-1} + \dfrac{\dfrac{\sum n_ic_i}{2} - (n_{i-1}c_{i-1})c\uparrow}{n_ic_i} a_i$

$Ml = 150 + \dfrac{3775 - 2500}{2800} 50$

$Ml = 150 + \dfrac{1275}{2800} \times 50 = \boxed{172,77 \text{ dhs}}$

5°) Courbe de Lorenz :

$p_i = \frac{n_i c^{\nearrow}}{N} \cdot 100$	$q_i = \frac{(n_i c_i) c^{\nearrow}}{\sum n_i c_i} \cdot 100$
20	9,93
48	33,11
80	70,20
100	100



6°) Indice de GINI :

$$I_G = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} q_i}{\sum_{i=1}^{k-1} p_i}$$

$$I_G = 1 - \frac{113,24}{148}$$

$I_G = 1 - 0,765 \simeq 0,235$ proche de zéro $\Rightarrow$ équi- distribution