Université Abdelmalek Essaâdi
Ecole Normale Supérieure

Exposé sous thème:

Simulation de variables aléatoires

Réalisé par :
Bouasria Iman
El Kamoum Reda

Plan

I. Introduction

II. Simulation de Variables aléatoires continues

III. Simulation de Variables aléatoires discrètes

IV. Exemples sur Excel

Introduction

«Lorsqu'on souhaite répéter une expérience aléatoire un grand nombre de fois (5000 fois le lancer d'un dé à 6 faces, par exemple), on peut faire soi-même l'expérience avec un dé (mais c'est long et fastidieux) ou on peut utiliser un simulateur(la calculatrice ou un tableur, par exemple). Ainsi, la simulation remplace l'expérience et permet d'étudier des séries statistiques comportant un grand nombre de données. »

Simulation des variables aléatoires

Objectif

- Produire des observations (variables) X à partir de distributions (binomiale, exponentiel , normal, etc.)

Algorithme général

- Générer un ou plusieurs U = U(0,1)
- Transformer U en X (dépend de la distribution souhaitée)

Approches

- Fonction inverse
- Méthode d’approximation
- Méthode de rejet

Variables aléatoires continues

- Méthode de la fonction inverse:

On veut simuler une variable aléatoire continues X de fonction de répartition F.

- Théorème : Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F strictement croissante, on a:

$$F(X) \sim U[0;1]$$

Variables aléatoires continues

- Démonstration :

On pose : $u = F(x) \leftrightarrow \quad x = F^{-1}(u)$

Par définition, on a : $F(x) = \Pr\{X \leq x\}$

Et donc: $F(F^{-1}(u)) = \Pr\{X \leq F^{-1}(u)\}$

Or : $F(F^{-1}(u)) = u$

(par définition de la réciproque)

Et: $\Pr\{X \leq F^{-1}(u)\} = \Pr\{u \leq F(X)\}$

car F est strictement croissante.

On a donc

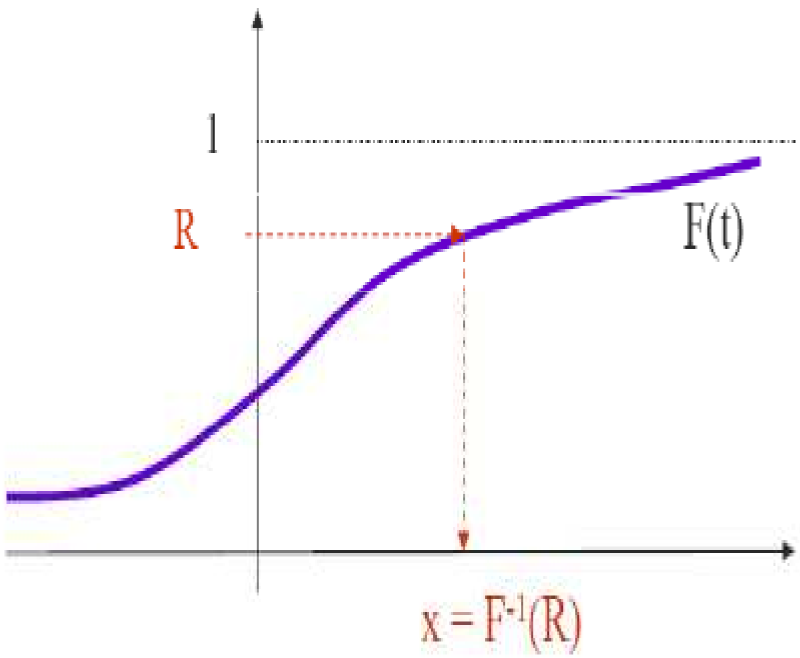
$$u = \Pr\{u \leq F(X)\}$$

et on reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme.

Variables aleatoires continues

Méthode : Si on connaît la fonction F^{-1}, réciproque de F, il suffit de tirer:

$$X = F^{-1}(U).$$



- Algorithme:
- Générer U = U(0,1)
- Trouver X tel que F(X) = U et retourner cette valeur $X = F^{-1}(U)$

Variables aléatoires continues « exemples »

Cas 1 : distribution uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & si\ x \in [a;b] \\ 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(x)\,dx = (x-a)/(b-a)$$

$$R = (X-a)/(b-a) \Rightarrow X = a + (b-a)R$$

Cas 2 : distribution exponentielle

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & si\ x \geq 0 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(x)\,dx = 1 - \exp(-\lambda x)$$

$$R = 1 - \exp(-\lambda x) \Rightarrow X = \lambda^{-1} \ln(1-R) \Rightarrow X = \lambda^{-1} \ln(R)$$

Variables aléatoires continues

La méthode de la fonction inverse (complexité):

- Difficultés à exprimer la fonction de répartition
- Exemple de la loi normale *N(m,σ)*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}$$

- Générer indépendamment R1 = U(0,1) et R2= U(0,1)
- Calculer

$$X = \mu + \sigma\sqrt{-2\ln(R_1)}.\cos(2\pi R_2)$$

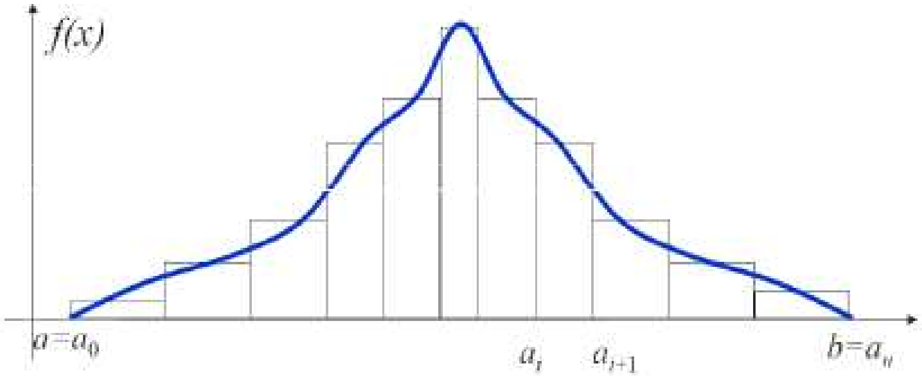
Ou

$$Y = \mu + \sigma\sqrt{-2\ln(R_1)}.\sin(2\pi R_2)$$

Variables aléatoires continues

La méthode d'approximation:

- Basée sur une approximation de la fonction de densité



L'espace sous f(x) est divisé en des rectangles à dimension égale

$$S_i = \frac{1}{n}; \forall i$$

➔ Tous les intervalles ont la même probabilité

$$f_i \times (a_{i+1} - a_i) = \frac{1}{n}$$

$$f(x) \approx f_i; \forall x \in [a_i; a_{i+1}]; i = 0..n$$

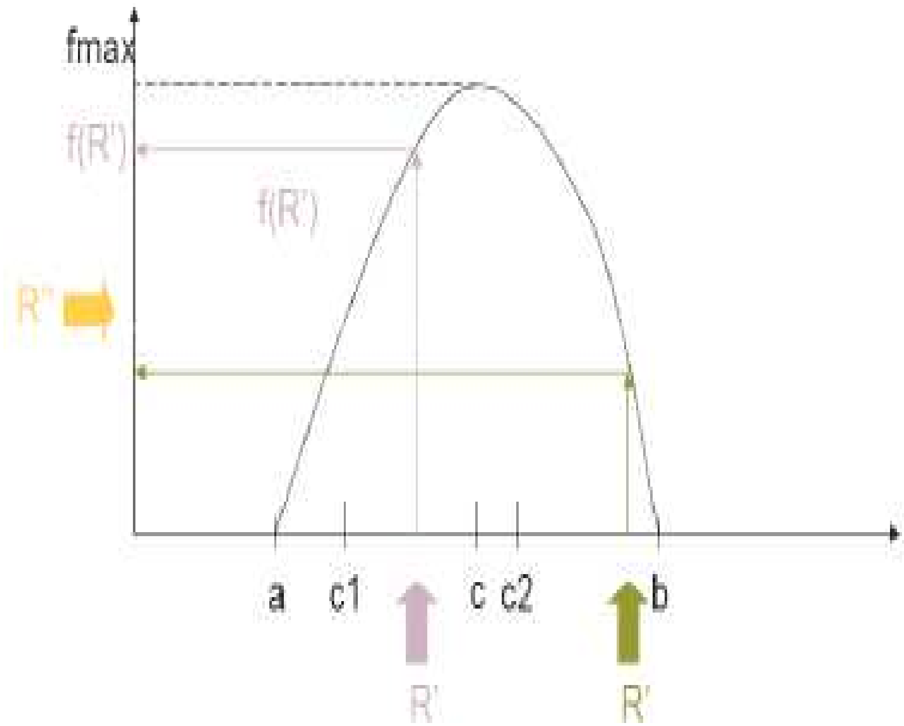
- Algorithme
  - $R_1 = U(0,1)$; $R_2 = U(0,1)$;
  - $i = \lfloor n * R_1 \rfloor$;
  - $X = a_i + (a_{i+1} - a_i) * R_2$

Variables aléatoires continues

La méthode rejet:

- Utilisée quand la fonction inverse n'est pas applicable directement
- Soit f(x) la fonction de densité de X :

$$f(x) \in [0; f_{max}]; x \in [a; b]$$



Variables aléatoires continues

Algorithme:

- Générer indépendamment R' = U(0,1) et R''= U(0,1)
- Calculer $X = a+(b-a)R'$; $Y=f_{max} R''$
- Si $Y<=f(X)$, retourner X et stop
- Sinon réessayer avec de nouvelle valeurs de R' et R''

Simulation de Variables aléatoires discrètes

Fonction inverse – cas discret:

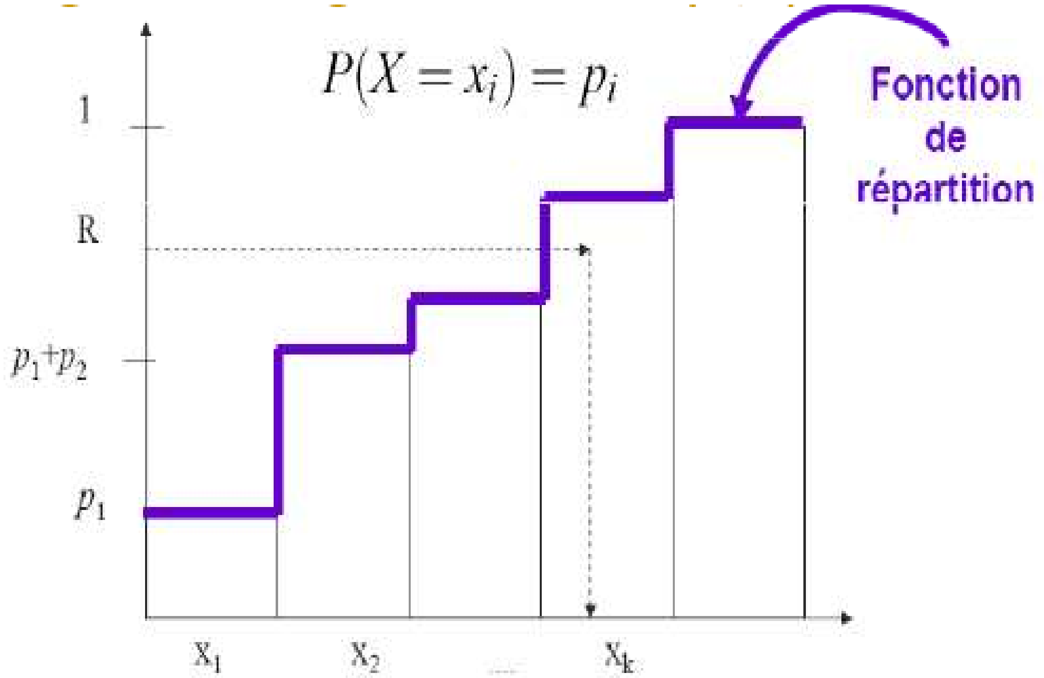
Cas général : algorithme DISC(X,P)

- Générer R = U(0,1)

$$\sum_{i=1}^{k-1} P(X = x_i) < R \leq \sum_{i=1}^{k} P(X = x_i)$$

$$\Longleftrightarrow P(X \leq x_{k-1}) < R \leq P(X \leq x_k)$$

$$\Longleftrightarrow F_X(x_{k-1}) < R \leq F_X(x_k)$$



Simulation de Variables aléatoires discrètes

Loi de Bernoulli :

- On veut simuler $X \sim B(p)$.

  On tire $U \longrightarrow \quad x = 1$ si $u \leq p$;

  $x = 0$ sinon

  c'est-à-dire:

$$X = 1_{\{U \leq p\}}.$$

Variables aléatoires discrètes

Pile ou face

- On veut simuler une variable aléatoire de loi "Pile ou Face"

  $X \sim B(1/2)$.

  On tire U "Pile" si $U \leq 1/2$

  "Face" sinon

- Formellement, cette procédure s'écrit:

$$X = 1_{\{U \leq 1/2\}}$$

Variables aléatoires discrètes

Loi binomiale :

On veut simuler X ~ B(n; p).

- On sait qu'une variable binomiale représente la somme de n variables indépendantes de Bernoulli de paramètre p:

$$\{Y_1, \ldots Y_n\} \text{ i.i.d., } Y_i \sim \mathcal{B}(p) \quad \Rightarrow \quad X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Il suffit donc de simuler n variables aléatoires indépendantes de loi B(p) et d'en faire la somme :

$$X = \sum_{i=1}^{n} 1\{U_i \leq p\}.$$

Variables aléatoires discrètes

Loi de Poisson :

- On veut simuler $X \sim P(\lambda)$.

Une variable aléatoire poissonnienne ne prend pas ses valeurs dans un ensemble fini, mais on peut étendre la méthode précédente au cas ou X prend ses valeurs dans IN. En fait, la méthode proposée ici annonce la méthode de la fonction inverse.

Variables aléatoires discrètes

Loi de Poisson :

On sait que

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad p_k = \Pr\{X = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad (\text{pour } k \in \mathbb{N})$$

ce qui implique que

$$p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} p_k$$

et, en notant P_k le cumul des p_k ($P_k = \sum_{j=0}^{j=k} p_j$), que

$$P_{k+1} = P_k + \frac{\lambda}{p+1} p_k.$$

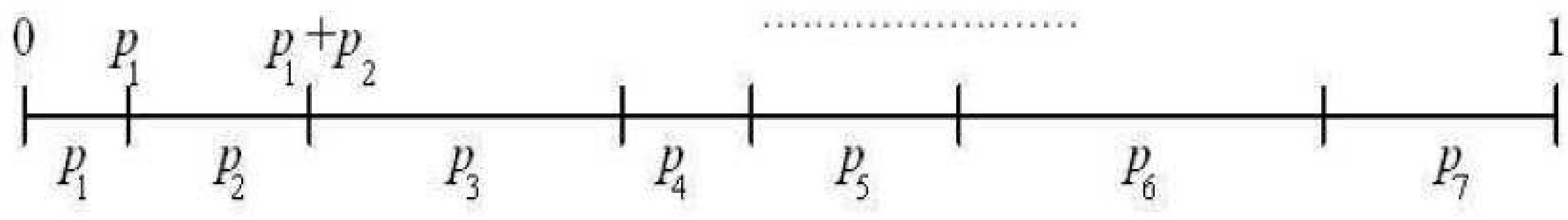
On simule donc un variable de Poisson de paramètre λ en prenant

$$X = \sum_{k \geq 0} k \mathbf{1}\{P_{k-1} \leq U < P_k\}$$

Variables aléatoires discrètes

Loi de Poisson:

Remarque : Cette méthode revient à découper l'intervalle [0; 1] en K morceaux de longueurs respectives pk :



Merci pour votre attention