Nombres aléatoires ou nombre au hasard

Prof. Mohamed El Merouani
Département de Statistique et Informatique
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan

I.-Introduction :

Les méthodes de simulation consistent à faire intervenir le hasard dans un ou plusieurs phénomènes impliqués dans un problème à résoudre. Ainsi, la simulation permet d'appréhender un phénomène aléatoire en construisant un échantillon artificiel de sa distribution de probabilité.
Dans les problèmes de gestion, on peut simuler plusieurs politiques de contrôles à l'aide des séries de données suffisamment longues. Dans le cas où, on ne dispose pas d'un large historique de l'entreprise ou si le contrôle de la source de probabilité n'est pas possible dans le modèle réel, la simulation est alors nécessaire. Aussi, si l'expérience réelle coute chère, la simulation (aléatoire) devient indispensable pour l'étude de tout système ou sous système de l'entreprise.
Les méthodes de la simulation aléatoire nous permettent de construire à l'aide des ordinateurs, un échantillon $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ à partir de n'importe quelle loi de probabilité donnée.
Nous verrons dans ce cours quelques simples algorithmes de simulation des lois de probabilités usuelles.

II.-Nombres aléatoires :

La génération de nombres aléatoires est une technique de grande importance dans n'importe quel champ qui exige des modèles où intervient l'incertitude. Par exemple, en informatique, elle donne une bonne source de données pour vérifier l'efficacité d'un algorithme ; en analyse numérique elle permet de résoudre des problèmes compliqués ; en statistique, elle enrichi les méthodes d'échantillonnage, la vérification des hypothèses ; et en général, elle est fondamentale dans n'importe quel problème dû au hasard…
Une réalisation d'une suite de nombres au hasard (aléatoires) indépendants et uniformément distribués sur le segment [0, 1]: $u_1, u_2, \ldots$ est toujours utilisée pour obtenir une réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes et arbitrairement distribuées.
Il existe des tables de nombres au hasard (voir annexe 1) qui sont telles que la suite des nombres qui y figurent est assimilable à la réalisation de tirages avec remise dans une urne à dix catégories de boules figurant à proportions égales.
Les ordinateurs fabriquent des nombres au hasard qui sont « pseudo-aléatoires » basés sur des formules de congruences (voir annexe 2).
Disposer d'un bon générateur de nombres aléatoires est fondamental en Simulation.
On peut définir une suite de nombres pseudo-aléatoires comme une suite de nombres bien déterminés mais imprévisibles et qui satisfait pourtant à un certain nombre de propriétés.
Une propriété souhaitable de la source des nombres aléatoires est sa reproductivité, de façon que l'on répète l'expérience plusieurs fois dans les mêmes conditions. Aussi la nécessité de stocker les données, le possible problème de limite de mémoire et difficulté d'accéder aux données rend la simulation encore plus demandée. D'où, il faut chercher des générateurs (algorithmiques) de nombres au hasard (pseudo-aléatoires).
L'idée due à Von Neumann est de produire des nombres pseudo-aléatoires en utilisant les opérations arithmétiques (de l'ordinateur): on commence par une valeur initiale (u_0 ou u_{-1}) et on génère une suite par la formule $u_i = f(u_{i-1})$ avec f est une fonction.

Une suite de nombres aléatoires (u_i) est une suite de nombres en [0,1] avec les mêmes propriétés statistiques de l'uniformité (équi-répartition des chiffres) et de l'indépendance des termes.
Autres propriétés propriété souhaitable dans un générateur de nombres aléatoires sont :

- Rapidité
- Petite occupation de mémoire
- Portabilité
- Facilité dans l'implantation
- Reproductivité et mutabilité
- Périodicité suffisamment longue

Pour vérifier si ces propriétés sont réalisées de façon raisonnable, on utilise un certain nombre de tests statistiques.

III.- Générateur de milieu de carrée de Von Neumann:

On choisit un nombre qu'on élève au carré. On prélève une partie médiane de ce carré que l'on élève à son tour au carré et on recommence l'opération. On définit de proche en proche des nombres par le « milieu » du carré du nombre précédent.

$$\begin{cases} x_0 \ donnée \\ x_{i+1} = \dfrac{x_i^2}{2} \end{cases}$$

Ces nombres ne sont pas aléatoires, ils dépendent du 1er choisi, et ont, malheureusement, une faible période et donc ils sont peu employés en pratique.

IV.- Générateurs (linéaires) de congruences:

Ils sont dus à Lehmer (1951). La formule principale de ces générateurs est la suivante :

$$x_{n+1} \equiv (ax_n + b)[\operatorname{mod} m]$$

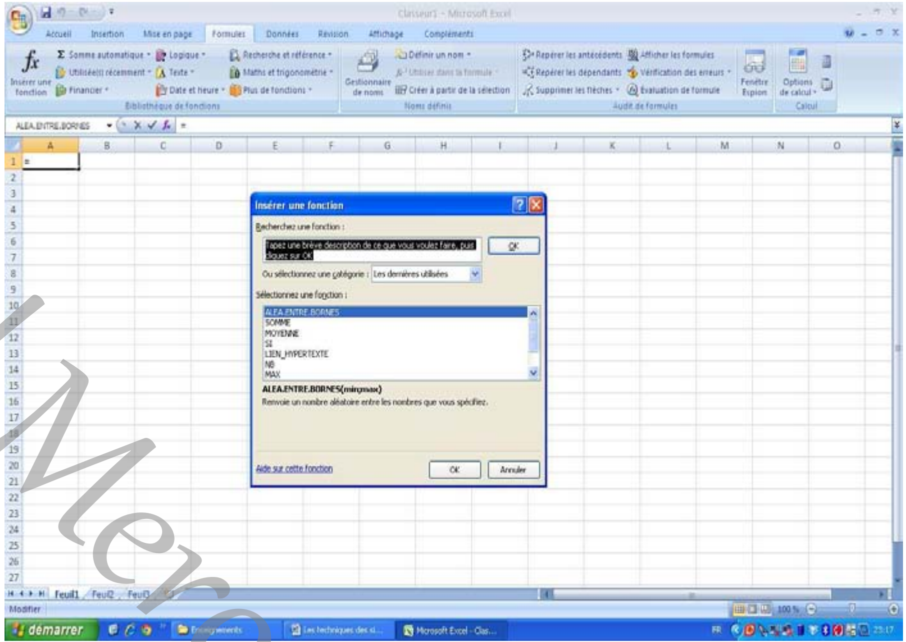
Pour un $U_n = \dfrac{x_n}{n}$

- multiplicateur a
- biais b
- module m
- valeur initiale x_0

Ou, sans perte de généralité, on suppose que $a, b \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$. Si b=0, ils sont dits multiplicatives. Les nombres (u_n) ainsi obtenus ne sont pas vraiment des nombres aléatoires, ils sont dits des nombres pseudo-aléatoires.

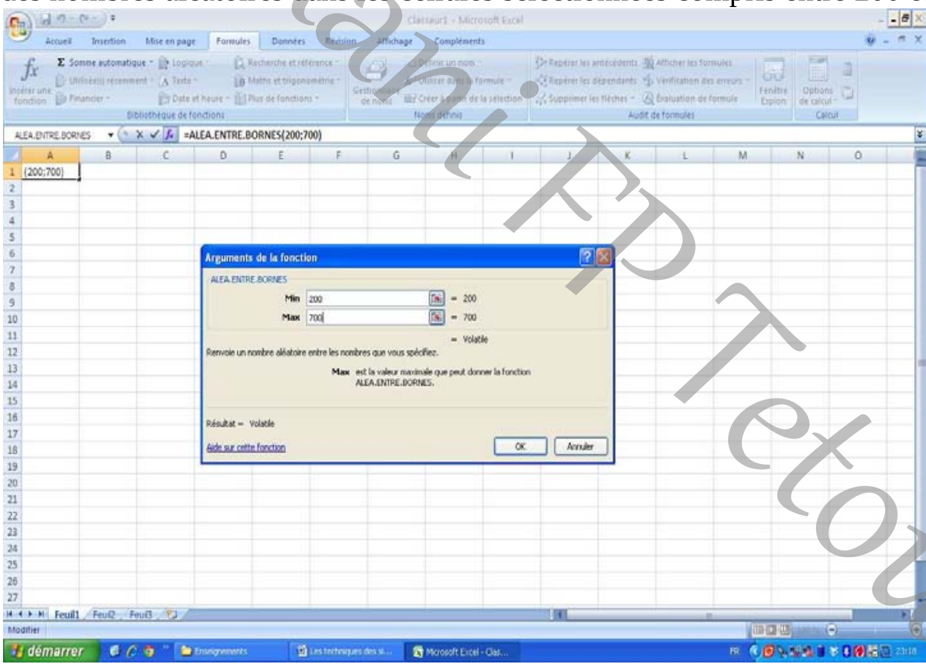
V.- Nombre aléatoire en Excel:

En Excel, on peut générer automatiquement des nombres aléatoires :
Cliquez sur une cellule, insérez la fonction ALEA.ENTRE.BORNES(200, 700).
Cette fonction produit un nombre aléatoire compris entre les valeurs extrêmes choisies (min et max)



Effectuez un remplissage automatique d'une plage de cellules, en glissant la poignée de remplissage.

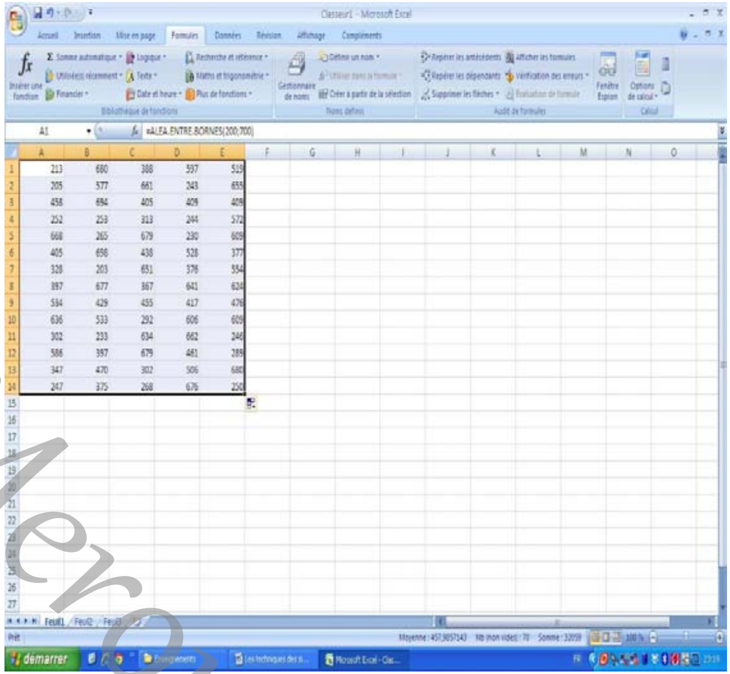
Excel entre des nombres aléatoires dans les cellules sélectionnées compris entre 200 et 700.



Mais, ces nombres ne sont pas fixes, Excel recalcule automatiquement ces nombres chaque fois que vous saisissez un nombre ou vous appuyez sur F9.

Donc, vous devez convertir les formules à nombres aléatoires en valeurs.

Pour cela, il suffit de copier le contenu des cellules et de coller (collage spécial) seulement les valeurs (sans formules).



Et ainsi, vous avez des valeurs aléatoires et non pas des formules (qui génèrent constamment des nombres) dans les cellules sélectionnées.

VI.- Conclusion:

La question qui se pose maintenant est comment faire pour générer des nombres aléatoires qui suivent une loi de probabilités bien déterminée au départ.
D'abord, on sait que les méthodes que nous avons vu donnent que des nombres qui suivent une loi uniforme.
En plus, on doit voir comment générer des lois de probabilités discrètes et aussi continues.

VII.- Références :

- B. bercu & D. chafaï, :« Modélisation Stochastique et Simulation », Dunod, 2007.
- James A. Payne: «Introduction to Simulation; Programming Techniques and Methods of Analysis », Mc Graw Hill, 1988.
- Reuven Y. Rubinstein:«Simulation and the Monte Carlo Method », John Wiley & Sons, 1981.
- Stewart V. Hoover/ Ronald F. Perry: «Simulation: A Problem-Solving Approach», Adisson-Wesley, 1989.
- Averill M. Law & W. David Kelton: «Simulation Modeling and Analysis », Mc Graw Hill, 1982, 1991 (deux livres différents)

VIII.- Annexes :

1) Table du nombre au hasard :

9. Random Numbers Uniformly Distributed on the Interval [0, 1]

0.5916	4448	9019	8861	5489	2645
6562	7042	2267	3584	7449	7919
3127	5978	4955	6484	3687	9664
0690	7147	8562	5270	2378	5050
3617	3406	1790	7880	3741	5470
7128	7463	4161	6512	2786	1255
6635	1413	5412	7803	2196	8954
9162	0120	7403	1889	2139	2383
9313	6700	6079	2748	9953	8382
8216	6396	8203	2558	7441	8546
9470	5477	9711	1932	4728	1479
3361	3901	3993	9279	5673	1653
5303	5889	5940	2154	1907	2311
1039	8851	6787	5033	5986	2198
9031	2099	9121	4101	0833	4776
9481	6387	7480	1643	4049	5132
8922	5501	0399	6253	9202	6570
5725	9430	4184	3136	8549	1019
4398	4215	1992	9629	4386	8382
3652	4474	3374	3147	9362	4387
9612	6145	1197	4513	6122	0115
6836	6542	4237	6319	0193	2943
4601	7198	6838	2226	1987	5803
9154	5889	8315	0471	5314	1904
2212	0448	5759	0836	5825	7005
7158	0101	8865	4963	4135	1693
9192	8247	2141	5307	3821	7586
3072	7397	5643	4188	1094	6005
2380	8036	6883	8764	2625	0596
3290	2036	9632	1752	6213	5809

2) Congruence modulo m :

La congruence modulo *m* est définie par:
Un entier *p* est congru à un entier *r* modulo *m*, si *r* est le reste de la division euclidienne de *p* par *m*. Cela veut dire qu'il existe un entier *q* tel que $p=r+qm$, avec $0\leq r\leq m$.