ECOLE NORMALE SUPERIEURE MARTIL

# Exposé sur la méthode « BOX MULLER »

Réalisée par :
FAYZ Hagar
SOUKAMKIAN Roseline Sylvie

Encadé par :
Mr MEROUNI

Master : GIE

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2011/2012

# Simulation de la loi normale centrée réduite :

On veut simuler des variables aléatoires indépendantes suivant la loi gaussienne centrée réduite N(0,1). Il est possible de trouver une méthode de décomposition, adaptée non seulement à la densité de la loi N(0, 1) mais aussi aux qualités du générateur et du compilateur, qui soit plus rapide que celles qui suivent. Les méthodes que nous donnons ici sont faciles à programmer.

## Algorithme polaire :

Il repose sur le résultat suivant. Théorème 1.1 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, de loi uniforme sur le disque unité :

$$D = \{(x, y) \,;\, x^2 + y^2 < 1\} .$$

Ecrivons ces variables aléatoires en coordonnées polaires :

$$X = R\cos(\Theta) \,;\, Y = R\sin(\Theta) .$$

$$R' = \sqrt{-4\log(R)} .$$

$$U = R'\cos(\Theta)\; et\, V = R'\sin(\Theta) .$$

sont deux variables aléatoires indépendantes, de même loi N(0, 1).

La preuve de ce résultat repose sur le changement de variable en polaire qui permet d'obtenir que les variables R et θ sont indépendants. Il permet aussi d'obtenir que R suit une loi bêta de paramètre 2 et 1 (aussi appelée loi triangulaire sur [0, 1]) et que θ suit une loi uniforme sur [0, 2 θ]. On en déduit ensuite aisément la densité de la loi du couple (U, V) par un second changement de variable en polaire. Interprétation géométrique : on pourra faire un dessin pour représenter la position du vecteur (U, V) par rapport à celle du point initial (X, Y). Ces deux points forment le même angle avec l'axe des abscisses. Seule leur norme diffère. On déduit de ce résultat et de son interprétation géométrique, l'algorithme polaire :

```
Repeter
X<-2*runif(1,0,1)-1
Y<-2*runif(1,0,1)-1
R2<-X*X+Y*Y
Jusqu'a (R2<1) # (X,Y) est de loi uniforme sur le disque unite (methode de rejet)
Z<- Sqrt(-2*log(R2)/R2) #facteur mutiplicatif modifiant uniquement la norme de (X,Y)
U<-Z*X
V<-Z*Y # U et V sont independants de loi N(0,1)
```

# Méthodes Box-Muller :

La distribution normale (ou loi gaussienne) est certainement la plus célèbre des distributions non-uniformes, mais elle est également l'une des plus utilisées. Étant donnée la difficulté de trouver pour elle une mise en œuvre simple dans le cadre des méthodes universelles (inversion et rejet), un important effort scientifique a été consenti durant les cinquante dernières années pour trouver des méthodes spécifiques à la gaussienne qui soient adéquates. La distribution normale de l'équation (a l'avantage de ne pas être entièrement soumise à ses paramètres puisque toute variable x issue de la normale centrée réduite :

$\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$, peut être manipulée pour obtenir $y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ pour tous $\sigma > 0$ et $\mu$. On applique simplement $y = \sigma x + \mu$. Aussi les algorithmes spécifiques à la distribution normale se concentrent sur la distribution normale centrée réduite :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

La plus célèbre des méthodes spécifiques à la gaussienne est due aux chercheurs Box et Muller et porte de ce fait leur nom. Elle consiste à utiliser un certain nombre d'opérations arithmétiques sur des échantillons de U(0,1) pour aboutir à produire des échantillons x de la fonction f(x), donnée par l'équation :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Plus exactement, en prenant u0 et u1, deux échantillons indépendants issus de U(0,1), Box et Muller relèvent que les variables x0 et x1 , données par :

$$\begin{cases} x_0 = \sqrt{-2\ln u_0}\cos 2\pi u_1 \\ x_1 = \sqrt{-2\ln u_0}\sin 2\pi u_1 \end{cases}$$

Elles sont indépendantes et suivent la normale N(0,1). Cette expression est généralement connue comme la forme cartésienne de l'algorithme Box-Muller puisque x0 et x1 sont les coordonnées cartésiennes du vecteur de coordonnées polaires :

$$\begin{cases} R = \sqrt{-2 \ln u_0} \\ \Theta = 2\pi u_1 \end{cases}$$

Une forme dite polaire de l'algorithme Box-Muler existe aussi et permet quant à elle d'éviter le recours aux fonctions trigonométriques qui peuvent être coûteuses en temps de calcul [15]. Ainsi, en prenant les deux échantillons u0 et u1 de U(0,1) et leur contrepartie respective X = 2u0−1 et Y = 2u1−1, uniformément réparties sur l'intervalle] −1,0[∪]0,1[, alors les variables x0 et x1 suivent N(0,1) si s <1.

$$\begin{cases} x_0 = X\sqrt{-\frac{2}{s} \ln s} \\ x_1 = Y\sqrt{-\frac{2}{s} \ln s} \\ s = X^2 + Y^2 \end{cases}$$

Cette forme polaire de l'algorithme Box-Muller appartient à la famille des méthodes derejet. Dans la pratique, la forme polaire compense le rejet (dont le ratio ρa a= 1.2146) parune accélération du calcul des variables x0 et x1 en évitant le calcul d'un sinus et d'un cosinus.