Processus de Poisson

Compléments

1

Processus de Poisson: Système différentiel

- Pour Δt suffisamment petit, on a:

$$\begin{cases} P\big(N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\big)=o(\Delta t), \\ P\big(N(t+\Delta t)-N(t)=1\big)=\lambda\Delta t+o(\Delta t), \\ P\big(N(t+\Delta t)-N(t)=0\big)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t) \end{cases}$$

- En notant

$$p_n(t)=P\big(N(t)=n\big)$$

- On a:

2

Processus de Poisson: Système différentiel

On a:

$$p_n(t+\Delta t) = P(N(t)=n)P(N(t+\Delta t)-N(t)=0)+$$
$$+P(N(t)=n-1)P(N(t+\Delta t)-N(t)=1)+o(\Delta t)$$
$$= p_n(t)(1-\lambda\Delta t)+p_{n-1}(t)(\lambda\Delta t)+o(\Delta t)$$
$$= p_n(t)+\lambda\Delta t[p_{n-1}(t)-p_n(t)]+o(\Delta t)$$

d'où

$$\frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{\Delta t} = \lambda[p_{n-1}(t)-p_n(t)]+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

3

Processus de Poisson: Système différentiel

or

$$p'_n(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{\Delta t}$$

et donc, en passant à la limite pour $\Delta t \to 0$, il vient:

$$p'_n(t) = \lambda[p_{n-1}(t)-p_n(t)]$$

4

Processus de Poisson: Système différentiel

Il faut cependant isoler le cas particulier n=0:

$$p_0(t+\Delta t)=P(N(t)=0)P(N(t+\Delta t)-N(t)=0)$$
$$=p_0(t)[1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]$$

qui donne

$$p'_0(t)=-\lambda p_0(t)$$

5

Processus de Poisson: Système différentiel

Les fonctions $p_n(t)$ vérifient donc le système différentiel:

$$\begin{cases} p'_0(t)=-\lambda p_0(t), \\ p'_n(t)=\lambda[p_{n-1}(t)-p_n(t)] \quad pour \;\; n>0 \end{cases}$$

6

Processus de Poisson: Résolution du système différentiel

1. On a

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) \Leftrightarrow p_0(t) = C_0 e^{-\lambda t}$$

$$or \;\; p_0(0) = 1 \;\; donc \;\; p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

7

Processus de Poisson: Résolution du système différentiel

2. On a

$$p'_1(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} - \lambda p_1(t)$$

On résout tout d'abord

$$p'_1(t) = -\lambda p_1(t) \Leftrightarrow p_1(t) = C_1 e^{-\lambda t}$$

puis on fait varier la constante C_1=$C_1(t)$ ce qui donne

$$p'_1(t) = e^{-\lambda t}\left[C_1'(t) - \lambda C_1(t)\right]$$

8

Processus de Poisson: Résolution du système différentiel

et en reportant dans l'équation de départ, on a

$$e^{-\lambda t}\left[C_1'(t) - \lambda C_1(t)\right] = e^{-\lambda t}\left[\lambda - \lambda C_1(t)\right]$$

$$\Rightarrow C_1'(t) = \lambda$$

$$\Rightarrow C_1(t) = \lambda t + c_1$$

d'où $p_1(t) = (\lambda t + c_1)e^{-\lambda t}$ or $p_1(0) = 0$

donc $p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

9

Processus de Poisson: Résolution du système différentiel

On peut montrer (par récurrence) que :

$$\forall n \geq 0, \quad p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

La propriété est vérifiée pour n=0 et n=1.
Supposons qu'elle vrai pour n et démonter qu'elle l'est aussi pour n+1.

10

Processus de Poisson: Résolution du système différentiel

$$p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \Rightarrow p'_{n+1}(t) = \lambda\left[e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} - p_{n+1}(t)\right]$$

(d'après, l'équation différentielle (2))

on a donc

$$p_{n+1}(t) = C_{n+1}(t)e^{-\lambda t} \Rightarrow p'_{n+1}(t) = e^{-\lambda t}\left[C'_{n+1}(t) - \lambda C_{n+1}(t)\right]$$

et, en reportant

$$e^{-\lambda t}\left[C'_{n+1}(t) - \lambda C_{n+1}(t)\right] = e^{-\lambda t}\left[\lambda\frac{(\lambda t)^n}{n!} - \lambda C_{n+1}(t)\right]$$

11

Processus de Poisson: Résolution du système différentiel

d'où

$$C'_{n+1}(t) = \lambda\frac{(\lambda t)^n}{n!} \Rightarrow C_{n+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} + c_{n+1}$$

et, en utilisant

$$p_{n+1}(0) = 0$$

on obtient finalement

$$p_{n+1}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

c.q.f.d.

12

Temps d'attente: Loi de la durée séparant deux événements

- On s'intéresse maintenant à la durée (aléatoire) séparant deux occurrences de l'événement.
- On se place à une date t_0 et on s'intéresse à la variable T (temps d'attente jusqu'à l'occurrence du prochain événement.
- On a $P(T>t)=P(N(t_0+t)-N(t_0)=0)$

  $=P(N(t)=0)$ (hypothèse B de homogénéité dans le temps)

13

Temps d'attente: Loi de la durée séparant deux événements

donc $P(T>t)=p_0(t)=e^{-\lambda t}$

La loi de T est donc indépendante de t_0, et on a:

$$P(T\leq t)=1-e^{-\lambda t}\Leftrightarrow T \sim> \mathcal{E}xp(\lambda)$$

Remarque: On ne se préoccupe pas de savoir si t0 est elle-même une date d'occurrence ou pas, car cela ne change pas la loi de T grâce à l'hypothèse de homogénéité dans le temps.

14

Interprétation:

- On a vu que N(t) suit une loi de Poisson de paramètre λt, on a donc

$$N(1) \sim> P(\lambda) \Leftrightarrow E[N(1)] = \lambda$$

ce qui signifie que le nombre moyen d'événements survenant en une unité de temps est égal à λ.

- On a vu de plus que $T \sim> exp(\lambda)$ on a donc $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ ce qui signifie que la durée moyenne séparant deux événements est égale à $1/\lambda$.

15